

Existence d'un feuilletage positivement transverse à un homéomorphisme de surface

Olivier JAULENT*

6 mars 2013

Abstract

Existence of a topological foliation transverse to the dynamics of a homeomorphism. Let F be a homeomorphism of an oriented surface M that is isotopic to the identity. Le Calvez proved that if F admits a lift \tilde{F} without fixed points to the universal covering of M , then there exists a topological foliation of M transverse to the dynamics. We generalize this result to the case where \tilde{F} has fixed points. We obtain a singular topological foliation whose singularities are fixed points of F .

Mathematics Subject Classification (2010) : 37E30

Keywords : Surface homeomorphism, topological foliation transverse to the dynamics, equivariant version of Brouwer's plane translation theorem

Résumé

Le Calvez a montré que si F est un homéomorphisme isotope à l'identité d'une surface M admettant un relèvement \tilde{F} au revêtement universel n'ayant pas de points fixes, alors il existe un feuilletage topologique de M transverse à la dynamique. Nous montrons que ce résultat se généralise au cas où \tilde{F} admet des points fixes. Nous obtenons alors un feuilletage topologique singulier transverse à la dynamique dont les singularités sont un ensemble fermé de points fixes de F .

Mots-clés : Homéomorphisme de surface, feuilletage topologique transverse à la dynamique, version équivariante feuilletée du théorème de translation plane de Brouwer

Dans cet article, nous considérons une surface connexe M et le groupe $\text{Homeo}_*(M)$ des homéomorphismes de M isotopes à l'identité. Nous appelons surface une variété topologique de dimension deux sans bord, orientable, séparée et dénombrable à l'infini. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 0.1. *Soient $F \in \text{Homeo}_*(M)$ et $I = (F_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie entre l'identité et F . Alors, il existe un ensemble fermé X de points fixes de F et un relèvement \hat{F} de la restriction $F|_{M \setminus X}$ au revêtement universel $\hat{\pi}_X : \hat{N}_X \rightarrow M \setminus X$ de $M \setminus X$ vérifiant :*

1. \hat{F} commute avec les automorphismes du revêtement universel et est sans point fixe ;
2. tout chemin de \hat{N}_X joignant un point $\hat{x} \in \hat{N}_X$ à son image $\hat{F}(\hat{x})$ se projette sur M en un chemin homotope à extrémités fixées au chemin $I(x)$ décrit par le projeté $x = \hat{\pi}_X(\hat{x})$ le long de l'isotopie I ;
3. pour tout sous-ensemble fermé $Y \subset X$, il existe un relèvement \hat{F}_Y de la restriction $F|_{M \setminus Y}$ au revêtement universel $\hat{\pi}_Y : \hat{N}_Y \rightarrow M \setminus Y$ de $M \setminus Y$ vérifiant :
 - (a) \hat{F}_Y commute avec les automorphismes du revêtement universel de $M \setminus Y$ et fixe les antécédents par $\hat{\pi}_Y$ des points de $X \setminus Y$;

*Lycée François I^{er}, 11 rue Victor Hugo 77 300 Fontainebleau, Prenom.Nom@normalesup.org

(b) tout chemin de \hat{N}_X joignant un point $\hat{x} \in \hat{N}_X$ à son image $\hat{F}(\hat{x})$ se projette sur M en un chemin dont tout relèvement à \hat{N}_Y issu d'un point \hat{y} a pour extrémité $\hat{F}_Y(\hat{y})$.

Justifions la présence des différentes conditions qui apparaissent dans cet énoncé. On notera $\text{Fix}(I)$ l'ensemble des points fixes le long d'une isotopie I . Une idée pour obtenir le relèvement \hat{F} est de construire une isotopie $I = (F_t)_{t \in [0,1]}$ entre l'identité et F et de considérer $X = \text{Fix}(I)$. En effet, l'isotopie restreinte $((F_t)|_{M \setminus X})_{t \in [0,1]}$ se relève au revêtement universel de $M \setminus X$ en une isotopie $(\hat{F}_t)_{t \in [0,1]}$ issue de l'identité de temps un le relèvement $\hat{F} = \hat{F}_1$ de $F|_{M \setminus X}$. Il est facile de vérifier que \hat{F} commute avec les automorphismes de revêtement et vérifie les assertions 2 et 3 du théorème 0.1.

Il reste à vérifier la principale propriété : on souhaite que \hat{F} soit sans point fixe. La proposition 2.13 assure que c'est le cas si l'isotopie I est maximale pour la relation d'ordre suivante. Si I et J sont deux isotopies entre l'identité et F , on dit que l'on a $I \leq J$ si $\text{Fix}(I)$ est contenu dans $\text{Fix}(J)$ et si I et J sont homotopes relativement à $\text{Fix}(I)$. Malheureusement nous ne savons pas répondre à la question suivante.

Question 0.2. Existe-t-il une isotopie maximale pour la relation d'ordre \leq ?

Nous avons donc laissé de côté les isotopies définies sur M au profit de la notion plus faible suivante. On dit qu'un sous-ensemble fermé $X \subset M$ est *non enlacé* s'il existe un relèvement \hat{F} de la restriction $F|_{M \setminus X}$ au revêtement universel $\hat{\pi}_X : \hat{N}_X \rightarrow M \setminus X$ de $M \setminus X$ qui commute avec les automorphismes de revêtement. Nous donnerons dans le paragraphe 1.4 plus de détails sur cette définition. Nous introduirons ensuite une relation d'ordre \preceq (définition 2.1) sur les ensembles non enlacés qui permettra d'obtenir la seconde assertion de notre énoncé. Nous montrerons qu'il existe des ensembles non enlacés maximaux pour cette relation d'ordre (proposition 2.9') et que les relèvements associés sont sans point fixe (proposition 2.10') ce qui complète la première assertion.

Justifions maintenant la présence de la troisième. Le théorème reste vrai si on la supprime. Cependant, dans certaines situations où X sépare M , il peut apparaître des composantes connexes de $M \setminus X$ homéomorphes à l'anneau $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$. Lorsque cela se produit, il n'y a pas unicité d'un relèvement \hat{F} qui commute avec les automorphismes de revêtement. Or en général l'un de ces relèvements présente des propriétés supplémentaires et la troisième assertion du théorème permet de le caractériser. Notre preuve consiste à rechercher un ensemble non enlacé X maximal pour \preceq et il semble raisonnable d'imposer qu'il soit plus grand (pour \preceq) que ses sous-ensembles fermés, ce qui correspond à la troisième assertion. Il se trouve que cette condition suffit pour assurer l'unicité du relèvement. En effet, certaines parties fermées $Y \subset X$ ne sépareront pas M . On obtiendra alors l'unicité d'un relèvement \hat{F}_Y de $F|_{M \setminus Y}$ puis l'unicité d'un relèvement \hat{F} de $F|_{M \setminus X}$ plus grand que \hat{F}_Y pour \preceq . Nous donnons un exemple explicite dans la partie 2.

Remarque 0.3. - Un théorème d'Epstein (voir paragraphe 1.4 et [Eps66]) permet de reformuler le théorème 0.1 en terme d'isotopie sur $M \setminus X$. Il affirme en effet que l'existence de \hat{F} entraîne celle d'une isotopie sur $M \setminus X$ entre l'identité de $M \setminus X$ et la restriction $F|_{M \setminus X}$ dont le relèvement au revêtement universel \hat{N}_X de $M \setminus X$ issue de l'identité admet \hat{F} pour temps un.

L'un des principaux intérêts du théorème 0.1 est que l'on peut en déduire l'existence d'un feuilletage positivement transverse à un homéomorphisme de surface (corollaire 0.8). Nous allons maintenant expliquer comment. La preuve repose sur la version équivariante feuilletée suivante du théorème de Brouwer, un résultat difficile démontré par Le Calvez.

Théorème 0.4 (Le Calvez [LC05]). *Soit \hat{G} un groupe discret d'homéomorphismes préservant l'orientation, agissant librement et proprement sur le plan \mathbb{R}^2 . Soit \hat{F} un homéomorphisme de \hat{N} préservant l'orientation et sans point fixe qui commute avec tous les éléments de \hat{G} . Alors il existe un feuilletage topologique $\hat{\mathcal{F}}$ par des droites de Brouwer de \hat{F} tel que $\hat{\mathcal{F}}$ soit invariant par tout élément de \hat{G} .*

Une *droite topologique orientée* est un plongement topologique propre ϕ de la droite réelle orientée \mathbb{R} ; elle sépare \hat{N} en deux composantes connexes. On dit qu'un tel plongement ϕ est une

droite de Brouwer de \hat{F} si $\hat{F}(\phi)$ est contenu dans la composante connexe de droite et $\hat{F}^{-1}(\phi)$ dans celle de gauche.

On déduit de ce résultat que sous les hypothèses du théorème 0.1 il existe un feuilletage topologique $\hat{\mathcal{F}}$ de \hat{N}_X par des droites de Brouwer de \hat{F} , tel que $\hat{\mathcal{F}}$ soit invariant par les automorphismes du revêtement $\hat{\pi}_X : \hat{N}_X \rightarrow N_X$. Le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ passe donc au quotient en un feuilletage topologique \mathcal{F} de M . Ce feuilletage est dit *positivement transverse* à \hat{F} . Expliquons ce que cela signifie avant d'énoncer le corollaire.

Définition 0.5 (Chemin transverse à un feuilletage). Soit M une surface et \mathcal{F} un feuilletage orienté sur M . On dit qu'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est *négativement transverse au feuilletage* \mathcal{F} si pour tout $t_0 \in]0, 1[$, il existe un intervalle ouvert $I_0 \subset]0, 1[$ contenant t_0 , un voisinage V de $\gamma(t_0)$ dans M et un homéomorphisme $\varphi : V \rightarrow]-1, 1[^2$ qui envoie $\gamma(t_0)$ sur le point $(0, 0)$, l'ensemble $V \cap \gamma(I_0)$ sur l'arc horizontal $] -1, 1[\times \{0\}$ orienté vers la droite et le feuilletage \mathcal{F} sur les droites verticales orientées vers le haut.

Remarque 0.6. Si $X \subset \text{Fix}(F)$ est un ensemble fermé de points fixes, un feuilletage sur $M \setminus X$ peut être vu comme un feuilletage topologique singulier sur M dont les singularités sont les points de X . On dira qu'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow M \setminus X$ est transverse au feuilletage singulier sur M s'il est transverse au feuilletage sur $M \setminus X$.

Définition 0.7 (Feuilletage transverse à la dynamique). Soit F un homéomorphisme d'une surface M , admettant un relèvement \tilde{F} au revêtement universel \tilde{M} de M qui commute avec les automorphismes de revêtement. Soit \mathcal{F} un feuilletage singulier sur M dont les singularités sont des points fixes de F . Le feuilletage \mathcal{F} est dit *positivement transverse à \tilde{F}* si pour tout point $z \in M \setminus X$, il existe un chemin γ_z de z à $F(z)$ dans $M \setminus X$, négativement transverse au feuilletage \mathcal{F} et *associé à \tilde{F}* , c'est-à-dire se relevant à \tilde{M} en un chemin joignant son origine \tilde{z} à $\tilde{F}(\tilde{z})$ (voir définition 1.7).

Corollaire 0.8. Soient $F \in \text{Homeo}_*(M)$ et \tilde{F} un relèvement à \tilde{M} qui commute avec les automorphismes de revêtement. Alors, il existe un sous-ensemble fermé $X \subset \text{Fix}(F)$ et un feuilletage topologique \mathcal{F} de M , dont X est l'ensemble des singularités, qui soit *positivement transverse à \tilde{F}* .

Expliquons l'intérêt de ce résultat. Dans [LC06], Le Calvez démontre l'existence de points périodiques de périodes arbitrairement grandes pour tout homéomorphisme hamiltonien non trivial d'une surface compacte orientée de genre $g \geq 1$. Dans sa preuve, il est amené à envisager deux cas selon que l'ensemble des points fixes vérifie la conclusion du théorème 0.1 ou non. Or les arguments utilisés dans le premier cas s'appliquent mot pour mot en remplaçant l'ensemble des points fixes par un sous-ensemble X donné par le théorème 0.1. L'étude du second cas n'est donc plus nécessaire.

On peut espérer que le théorème 0.1 et son corollaire 0.8 seront d'une grande utilité dans l'étude des homéomorphismes de surface.

Dans une première partie, nous allons rappeler des définitions et résultats classiques puis introduire des notions d'enlacement et de chemins adaptés, moins classiques et plus techniques, qui faciliteront les démonstrations des parties suivantes. Nous démontrerons ensuite le théorème 0.1 dans la partie 2 en nous appuyant sur les deux résultats suivants :

1. l'existence d'un relèvement maximal dans (\mathcal{R}, \preceq) , ensemble des relèvements qui commutent avec les automorphismes de revêtement (voir les définitions 1.4 et 2.1). Il s'agit de la proposition 2.9, un des principaux résultats de l'article, qui sera prouvée dans la partie 3. La démonstration de ce résultat qui repose sur le lemme de Zorn concentre l'essentiel des difficultés de l'article.
2. la possibilité de modifier une isotopie admettant un point fixe contractile en une isotopie fixant ce point (proposition 2.13). Ce résultat plus simple et classique sera démontré dans la partie 4. Nous avons choisi d'en donner une preuve détaillée dans la mesure où nous n'en connaissons pas de démonstration complète dans la littérature.

Une partie de ce travail a été faite au Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications, à l'université Paris 13. Je remercie très chaleureusement Patrice Le Calvez ; les nombreuses discussions que nous avons eues m'ont guidé pour introduire les outils utilisés et ses remarques ont largement contribué à clarifier les preuves. Je remercie particulièrement François Béguin qui m'a suggéré d'ajouter la troisième condition du théorème principal en vue des applications, ainsi que Marc Bonino, Sylvain Crovisier et Frédéric Le Roux.

1 Généralités

1.1 Notations

Chemin, lacet. Soit E un espace topologique. On désigne par *chemin* toute classe d'application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ modulo un reparamétrage préservant l'orientation ; le point $\gamma(0)$ est l'origine et le point $\gamma(1)$ l'extrémité. Nous noterons γ^- le chemin obtenu en changeant l'orientation de γ . La *concaténation* $\alpha.\beta$ de deux chemins α et β vérifiant $\alpha(1) = \beta(0)$ est le chemin γ représenté par le paramétrage suivant :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} ; \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Un *lacet* est un chemin dont l'extrémité z est égale à l'origine ; on dit alors qu'il est *basé en* z . En notant $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on peut représenter un lacet par une application continue $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow E$. On dit que deux lacets α et β sont *librement homotopes* s'il existe une application continue $\phi : [0, 1] \times \mathbb{T} \rightarrow E$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\phi(0, t) = \alpha(t)$ et $\phi(1, t) = \beta(t)$.

Deux chemins α et β vérifiant $\alpha(0) = \beta(0)$ et $\alpha(1) = \beta(1)$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $\phi : [0, 1]^2 \rightarrow E$ vérifiant pour tout $(s, t) \in [0, 1]^2$:

$$\phi(0, t) = \alpha(t), \quad \phi(1, t) = \beta(t), \quad \phi(s, 0) = \alpha(0) = \beta(0) \quad \text{et} \quad \phi(s, 1) = \alpha(1) = \beta(1).$$

On parlera de même d'*homotopie* entre lacets de même point base lorsque ce point reste fixe le long de l'homotopie. Un lacet basé en un point $z \in E$ est dit *contractile* s'il est homotope au lacet trivial basé en z .

Relèvement d'une isotopie, homotopie entre isotopies. Soit M une surface connexe. Une *isotopie* I est un chemin $t \mapsto F_t$ de $[0, 1]$ dans $\text{Homeo}(M)$ muni de la topologie compacte ouverte pour les homéomorphismes. Pour tout point $z \in M$, on note $I(z) : t \mapsto F_t(z)$ la *trajectoire* de z le long de l'isotopie. Il s'agit d'un lacet si et seulement si z est un point fixe de F_1 .

Soit $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M . Une isotopie $I = (F_t)_{t \in [0, 1]}$ telle que F_0 soit l'homéomorphisme identité id_M se relève à \tilde{M} en une isotopie $\tilde{I} = (\tilde{F}_t)_{t \in [0, 1]}$ vérifiant $\tilde{F}_0 = \text{id}_{\tilde{M}}$. L'homéomorphisme \tilde{F}_1 est appelé relèvement de F_1 *associé* à I ; nous le noterons \tilde{F}_I .

Considérons maintenant un sous-ensemble $N \subset M$. On dit que I et I' sont *homotopes relativement à* N si l'on peut choisir l'homotopie $\phi : [0, 1]^2 \rightarrow \text{Homeo}(M)$ de sorte que la restriction $\phi(s, t)|_N$ soit indépendante de $s \in [0, 1]$.

Nous utiliserons également la notion de *composée de deux isotopies* : si $I = (F_t)_{t \in [0, 1]}$ et $J = (G_t)_{t \in [0, 1]}$ sont deux isotopies, on note $J \circ I$ l'isotopie définie par $J \circ I = (G_t \circ F_t)_{t \in [0, 1]}$.

Point fixe contractile, point fixe d'une isotopie. Dans la suite de l'article, on se donne une surface connexe M et un homéomorphisme F de M isotope à l'identité. Si E est un ensemble, on note \bar{E} son adhérence, ∂E sa frontière et \mathring{E} son intérieur. La lettre X désignera toujours un sous-ensemble fermé de l'ensemble $\text{Fix}(F)$ des points fixes de F . Nous noterons $N_X = M \setminus X$ son complémentaire et $\hat{\pi}_X : \tilde{N}_X \rightarrow N_X$ son revêtement universel. Soient $I = (F_t)_{t \in [0, 1]}$ une isotopie entre l'identité et F et z un point fixe de F .

Définition 1.1. On dit que z est un *point fixe de* I s'il vérifie, pour tout $t \in [0, 1]$, $F_t(x) = x$. Nous noterons $\text{Fix}(I)$ l'ensemble des points fixes d'une isotopie I .

Définition 1.2. On dit que z est un *point contractile de I* s'il vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

1. le point z est un point fixe de I ;
2. le point z appartient à $\text{Fix}(F) \setminus \text{Fix}(I)$ et le lacet $I(z)$ est contractile dans $M \setminus \text{Fix}(I)$.

Nous noterons $\text{Cont}(I)$ l'ensemble des points contractiles d'une isotopie I .

1.2 Isotopie restreinte, relèvement

Définition 1.3. On appelle *isotopie restreinte* tout couple (X, I) formé :

- d'un sous-ensemble fermé $X \subset \text{Fix}(F)$;
- d'une isotopie définie sur N_X entre l'identité id_{N_X} et la restriction $F|_{N_X}$ de F à N_X .

On note \mathcal{I} l'ensemble des isotopies restreintes.

Définition 1.4. On note \mathcal{R} l'ensemble des couples (X, \hat{F}) formés :

- d'un sous-ensemble fermé $X \subset \text{Fix}(F)$;
- d'un relèvement \hat{F} de $F|_{N_X}$ au revêtement universel $\hat{\pi}_X : \hat{N}_X \rightarrow N_X$ qui commute avec les automorphismes de ce revêtement.

Remarque 1.5. Soit N une surface connexe non homéomorphe à l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ ou au tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Alors le groupe des automorphismes du revêtement universel de N est de centre trivial. Si F est un homéomorphisme de N , il admet donc au plus un relèvement \hat{F} au revêtement universel qui commute avec les automorphismes de revêtement.

Soit $(X, I) \in \mathcal{I}$ une isotopie restreinte. Relevons I à \hat{N}_X en une isotopie \hat{I} issue de l'identité $\text{id}_{\hat{N}_X}$. Le temps un de \hat{I} est le relèvement \hat{F}_I associé à I de la restriction $F|_{N_X}$. Or l'identité $\text{id}_{\hat{N}_X}$ commute avec les éléments du groupe \hat{G} des automorphismes du revêtement $\hat{\pi}_X : \hat{N}_X \rightarrow N_X$. Puisque \hat{G} est discret, la propriété de commutation est conservée le long de l'isotopie \hat{I} et \hat{F}_I commute avec les éléments de \hat{G} .

Définition 1.6 (Relèvement associé à une isotopie restreinte). Soit $(X, I) \in \mathcal{I}$ une isotopie restreinte. Le relèvement $(X, \hat{F}_I) \in \mathcal{R}$ est appelé *relèvement associé à l'isotopie restreinte (X, I)* .

Disposer d'un relèvement \hat{F} de F qui commute avec les automorphismes de revêtement assure que les notions suivantes ne dépendent pas du relèvement $\hat{\alpha}$ ou $\hat{\phi}$ choisi.

Définition 1.7 (Chemin et homotopie associés à un relèvement). Soit $(X, \hat{F}) \in \mathcal{R}$.

1. Un chemin $\alpha \subset N_X$ est dit *associé à \hat{F}* s'il se relève à \hat{N}_X en un chemin $\hat{\alpha}$ dont l'extrémité est image par \hat{F} de son origine.
2. Soit $\phi : [0, 1]^2 \rightarrow N_X$ une homotopie libre entre un lacet $\Gamma \subset N_X$ et son image $F(\Gamma)$. Choisissons un relevé $\hat{\Gamma}$ de Γ à \hat{N}_X . L'homotopie libre ϕ est dite *associée à \hat{F}* si elle se relève en $\hat{\phi} : [0, 1]^2 \rightarrow \hat{N}_X$ vérifiant :

$$\forall t \in [0, 1]^2 \quad \hat{\phi}(0, t) = \hat{\Gamma}(t) \quad \text{et} \quad \hat{\phi}(1, t) = \hat{F} \circ \hat{\Gamma}(t)$$

1.3 Chemin adapté à un ensemble de points fixes

Nous allons maintenant caractériser les chemins associés à un relèvement $(X, \hat{F}) \in \mathcal{R}$. Nous parlerons de chemins adaptés à l'ensemble X .

Définition 1.8 (Chemin adapté). Soient $F \in \text{Homeo}_*(F)$ et $X \subset \text{Fix}(F)$ un sous-ensemble fermé. Un chemin α d'origine un point z de N_X et d'extrémité $F(z)$ est dit *adapté à X* si pour tout lacet $\gamma \subset N_X$ basé en z , le lacet $\alpha.F(\gamma).\alpha^-$ est homotope, dans N_X , au lacet γ .

Remarque 1.9. Si $\alpha \subset N_X$ est un chemin adapté à X d'origine $z \in N_X$, alors tout lacet γ basé en z est librement homotope à son image $F(\gamma)$. En effet, les lacets γ et $\alpha.F(\gamma).\alpha^-$ sont alors homotopes et il est clair que ce dernier lacet est librement homotope à $F(\gamma)$.

Proposition 1.10. *Considérons $F \in \text{Homeo}_*(M)$ et un ensemble fermé $X \subset \text{Fix}(F)$.*

1. *Supposons que l'on dispose d'un relèvement $(X, \hat{F}) \in \mathcal{R}$. Tout chemin de N_X associé à \hat{F} est adapté à X .*
2. *Inversement, supposons que l'on dispose d'un chemin α adapté à X et qu'on le relève en un chemin $\hat{\alpha} \subset \hat{N}_X$. Si N_X est connexe¹, le relèvement \hat{F} de $F|_{N_X}$ qui envoie l'origine de $\hat{\alpha}$ sur son extrémité commute avec les automorphismes du revêtement universel $\hat{\pi}_X : \hat{N}_X \rightarrow N_X$. Le chemin α est alors associé à \hat{F} .*

Démonstration. 1. On suppose qu'il existe $(X, \hat{F}) \in \mathcal{R}$. Soit α un chemin de N_X associé à \hat{F} ; choisissons un relèvement $\hat{\alpha} \subset \hat{N}_X$ de α et notons \hat{z} son origine. Son extrémité est donc $\hat{F}(\hat{z})$. Considérons un lacet $\gamma \subset N_X$ basé en z et relevons-le en un chemin $\hat{\gamma} \subset \hat{N}_X$ d'origine \hat{z} . Il existe un unique automorphisme de revêtement \hat{T} tel que l'extrémité de $\hat{\gamma}$ soit $\hat{T}(\hat{z})$. Le chemin $\hat{F}(\hat{\gamma})$ a pour origine $\hat{F}(\hat{z})$ et pour extrémité $\hat{F} \circ \hat{T}(\hat{z})$ qui n'est autre que $\hat{T} \circ \hat{F}(\hat{z})$, extrémité du chemin $\hat{T}(\hat{\alpha})$. On peut donc concaténer les chemins $\hat{\alpha}$, $\hat{F}(\hat{\gamma})$ et $(\hat{T}(\hat{\alpha}))^-$. On obtient un chemin de mêmes extrémités \hat{z} et $\hat{T}(\hat{z})$ que $\hat{\gamma}$; il est donc homotope à $\hat{\gamma}$ car \hat{N}_X est simplement connexe. On en déduit que les lacets $\alpha.F(\gamma).\alpha^-$ et γ sont homotopes (à point base fixé) dans N_X et donc que α est adapté à X .

2. Inversement, soit $\hat{\alpha} \subset \hat{N}_X$ le relèvement d'un chemin α adapté à X dans N_X supposé connexe. On construit \hat{F} comme le relèvement de F envoyant l'origine \hat{z} de $\hat{\alpha}$ sur son extrémité. Considérons un automorphisme de revêtement \hat{T} et montrons l'égalité $\hat{T} \circ \hat{F} = \hat{F} \circ \hat{T}$. Choisissons un chemin $\hat{\gamma} \subset \hat{N}_X$ de \hat{z} à $\hat{T}(\hat{z})$. Il se projette sur un lacet $\gamma \subset N_X$ qui est, par hypothèse, homotope au lacet $\alpha.F(\gamma).\alpha^-$. Cela signifie que les relèvements issus de \hat{z} des chemins $\alpha.F(\gamma)$ et $\gamma.\alpha$ ont même extrémité. Or le lacet α se relève à partir du point \hat{z} en le chemin $\hat{\alpha}$ d'extrémité $\hat{F}(\hat{z})$. À partir de ce point, $F(\gamma)$ se relève en $\hat{F}(\hat{\gamma})$ d'extrémité $\hat{F} \circ \hat{T}(\hat{z})$. Par ailleurs, γ se relève à partir de \hat{z} en $\hat{\gamma}$ d'extrémité $\hat{T}(\hat{z})$. Le relèvement de α issu de ce point est $\hat{T}(\hat{\alpha})$ d'extrémité $\hat{T} \circ \hat{F}(\hat{z})$. On en déduit $\hat{T} \circ \hat{F}(\hat{z}) = \hat{F} \circ \hat{T}(\hat{z})$ donc $\hat{T} \circ \hat{F} = \hat{F} \circ \hat{T}$. \square

Remarque 1.11. Soient $F \in \text{Homeo}_*(F)$ et $X \subset \text{Fix}(F)$ un ensemble fermé. La proposition précédente montre l'équivalence des propriétés suivantes :

1. il existe un relèvement $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}$
2. pour tout $z \in N_X$, il existe un chemin α_z adapté à X d'origine z ;
3. il existe un chemin adapté à X dans chaque composante connexe de N_X ;

Lorsque les composantes connexes d'une surface N ne sont pas homéomorphes au tore ou à l'anneau, le groupe des automorphismes de revêtement est de centre trivial. On peut alors faire la remarque suivante.

Remarque 1.12. Soit N une surface de revêtement universel $\hat{\pi} : \hat{N} \rightarrow N$, dont le groupe \hat{G} des automorphismes de revêtement est de centre trivial et soit F un homéomorphisme de N . Alors deux chemins α et β de même origine $z \in N_X$ et adaptés à X sont homotopes à extrémités fixées dans N_X .

Démonstration. En effet, d'après la proposition qui précède, chacun de ces deux chemins est associé à un relèvement de $F|_{N_X}$ qui commute avec les automorphismes du revêtement universel $\hat{\pi}_X : \hat{N}_X \rightarrow N_X$. Or, d'après la remarque 1.5 et les hypothèses de la proposition, un tel relèvement \hat{F} est unique. Ainsi, α et β se relèvent à \hat{N}_X en deux chemins d'origine un relevé \hat{z} de z et de même extrémité $\hat{F}(\hat{z})$. En d'autres termes, les chemins α et β sont homotopes à extrémités fixées dans N_X . \square

1. Dans le cas où N_X n'est pas connexe, il faut disposer d'un chemin adapté par composante connexe pour construire le relèvement \hat{F} . Si c'est le cas, la construction est possible et le relèvement obtenu commute avec les automorphismes du revêtement universel $\hat{\pi}_X : \hat{N}_X \rightarrow N_X$.

1.4 Ensemble non enlacé

Afin de mieux comprendre les notions introduites ci-dessus, nous allons maintenant définir l'enlacement à partir de trois propriétés dont nous allons montrer qu'elles sont équivalentes à l'aide du théorème d'Epstein [Eps66]. Cette définition et cette équivalence permettent de mieux comprendre les notions utilisées dans l'article, mais elles ne seront pas utilisées sous cette forme dans la suite. Nous avons préféré travailler avec une relation d'ordre qui sera introduite dans le paragraphe suivant.

Proposition et définition 1.13. Soient $F \in \text{Homeo}_*(M)$ et $X \subset \text{Fix}(F)$ un ensemble fermé. On dit que X est *non enlacé* s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- (P1) il existe une isotopie restreinte $(X, I) \in \mathcal{I}$;
- (P2) il existe un relèvement $(X, \hat{F}) \in \mathcal{R}$;
- (P3) tout lacet $\Gamma \subset N_X$ est librement homotope dans N_X à son image $F(\Gamma)$.

Démonstration de l'équivalence des propriétés (P1), (P2) et (P3). Nous ne démontrons pas que la propriété (P3) entraîne la propriété (P1). Ce résultat difficile est dû à D.B.A. Epstein [Eps66]. Démontrons les deux autres implications.

Si X vérifie la propriété (P1), alors il existe une isotopie restreinte $(X, I) \in \mathcal{I}$. On a vu que l'on pouvait lui associer un relèvement $(X, \hat{F}) \in \mathcal{R}$ (voir la définition 1.6). Ainsi, X vérifie la propriété (P2).

Supposons maintenant que X vérifie la propriété (P2) et montrons qu'il vérifie alors la propriété (P3). Considérons un lacet $\Gamma \subset N_X$ basé en z . Soit α un chemin associé à \hat{F} issu de z ; il est donc adapté à X d'après la proposition 1.10. Le lacet Γ est donc homotope à $\alpha.F(\Gamma).\alpha^-$ qui est lui-même librement homotope à $F(\Gamma)$. L'ensemble X vérifie donc la propriété (P3). \square

Remarque 1.14. Soit X un ensemble non enlacé. D'après la remarque 1.5, lorsque $M \setminus X$ n'est pas homéomorphe à l'anneau ou au tore, le relèvement (X, \hat{F}) donné par la propriété (P2) est unique. C'est donc aussi le relèvement associé à l'isotopie restreinte (X, I) donné par la propriété (P1).

En revanche, dans le cas de l'anneau ou du tore, il n'y a pas unicité du relèvement $(X, \hat{F}) \in \mathcal{R}$. Cependant, étant donné un relèvement $(X, \hat{F}) \in \mathcal{R}$, on peut toujours trouver une isotopie restreinte $(X, I) \in \mathcal{I}$ tel que (X, \hat{F}) soit associé à (X, I) . En effet, le temps un d'une isotopie restreinte (X, I) donnée par (P1) diffère de (X, \hat{F}) d'un automorphisme de revêtement. Ce dernier est associé à une isotopie entre l'identité et elle-même réalisant la rotation correspondante de l'anneau ou du tore. En composant l'inverse de cette isotopie avec (X, I) , on obtient l'isotopie restreinte cherchée.

Question 1.15. Comme on l'a évoqué dans l'introduction, on peut définir une notion de non enlacement *a priori* plus forte que la précédente de la façon suivante. On dit que X est *fortement non enlacé* s'il existe une isotopie I entre l'identité id_M et F vérifiant $X \subset \text{Fix}(I)$. Nous ne savons pas si cette notion est équivalente à la précédente et ne l'utiliserons pas dans cet article.

Remarque 1.16. Dans le cas particulier où X est totalement discontinu, et notamment si X est fini, il est facile de répondre à la question précédente. En effet, si X est non enlacé, on peut trouver une isotopie restreinte $(X, I) \in \mathcal{I}$. Cette isotopie se prolonge en une isotopie sur M fixant les points de X et X est donc fortement non enlacé.

2 Présentation de la preuve

2.1 Relation d'ordre sur les relèvements

Notre objectif est la démonstration du théorème 0.1. Dans cette optique, nous recherchons un relèvement $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}$ avec \hat{F}_X sans point fixe. Pour cela, nous allons utiliser une relation d'ordre choisie de façon à ce que les relèvements maximaux conviennent (proposition 2.10). Introduisons la relation ; nous montrerons ensuite (proposition 2.5) qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Définition 2.1. On définit la relation suivante sur l'ensemble \mathcal{R} :

$$(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y) \quad \text{si} \quad \begin{cases} 1. \text{ on a } X \subset Y \subset \left(X \cup \hat{\pi}_X(\text{Fix}(\hat{F}_X)) \right); \\ 2. \text{ tout chemin de } N_Y \text{ associé à } \hat{F}_Y \text{ est également associé à } \hat{F}_X. \end{cases}$$

Remarque 2.2. Si $(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$, on a $\hat{\pi}_Y(\text{Fix}(\hat{F}_Y)) \subset \hat{\pi}_X(\text{Fix}(\hat{F}_X))$. En effet si z appartient à $\hat{\pi}_Y(\text{Fix}(\hat{F}_Y))$, alors le lacet trivial basé en z est associé à \hat{F}_Y donc à \hat{F}_X .

Remarque 2.3. Si $(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$ et $X = Y$, alors $(X, \hat{F}_X) = (Y, \hat{F}_Y)$. En effet, par hypothèse, tout chemin de $N_X = N_Y$ associé à \hat{F}_Y est aussi associé à \hat{F}_X ce qui entraîne l'égalité $\hat{F}_X = \hat{F}_Y$.

Remarque 2.4. On peut remplacer dans la définition la deuxième propriété par la propriété *a priori* plus faible

« il existe dans chaque composante connexe de N_Y un chemin associé à \hat{F}_Y et à \hat{F}_X ».

En effet, supposons l'existence d'un chemin α associé à \hat{F}_Y et à \hat{F}_X dans une composante connexe U de N_X . Montrons qu'alors tout chemin de U associé à \hat{F}_Y est aussi associé à \hat{F}_X . Soit $\alpha' \subset U$ associé à \hat{F}_Y . Relevons les chemins α et α' en $\hat{\alpha} \subset \hat{N}_Y$ et $\hat{\alpha}' \subset \hat{N}_Y$. Choisissons un chemin $\hat{\gamma}$ joignant l'origine de $\hat{\alpha}$ à celle de $\hat{\alpha}'$. Le chemin $\hat{F}_Y(\hat{\gamma})$ joint l'extrémité de $\hat{\alpha}$ à celle de $\hat{\alpha}'$. Comme les composantes connexes de \hat{N}_Y sont simplement connexes, on peut donc construire une famille continue $(\hat{\alpha}_t)_{t \in [0,1]}$ de chemins telle que $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}'$ et pour tout $t \in [0,1]$, $\hat{\alpha}_t$ ait pour origine $\hat{\gamma}(t)$ et pour extrémité $\hat{F}_Y(\hat{\gamma}(t))$. Par projection, on obtient alors une famille continue $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ de chemins. Comme par hypothèse $\alpha_0 = \alpha$ est associé à \hat{F}_X , tous les chemins α_t sont associés à \hat{F}_X . En particulier, le chemin $\alpha_1 = \alpha'$ est associé à \hat{F}_X .

Proposition 2.5. La relation \preceq est une relation d'ordre sur \mathcal{R} .

Démonstration. Il est clair que la relation \preceq est réflexive. Montrons qu'elle est antisymétrique. Supposons $(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$ et $(Y, \hat{F}_Y) \preceq (X, \hat{F}_X)$. On en déduit $X = Y$ puis $(X, \hat{F}_X) = (Y, \hat{F}_Y)$ d'après la remarque 2.3.

Enfin, montrons que \preceq est transitive. Supposons $(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$ et $(Y, \hat{F}_Y) \preceq (Z, \hat{F}_Z)$. On a donc :

$$\begin{aligned} X \subset Y \subset \left(X \cup \hat{\pi}_X(\text{Fix}(\hat{F}_X)) \right) \quad & \text{et} \quad Y \subset Z \subset \left(Y \cup \hat{\pi}_Y(\text{Fix}(\hat{F}_Y)) \right) \\ \text{puis} \quad X \subset Z \subset \left(Y \cup \hat{\pi}_Y(\text{Fix}(\hat{F}_Y)) \right) & \subset \left(X \cup \hat{\pi}_X(\text{Fix}(\hat{F}_X)) \right), \end{aligned}$$

en utilisant la remarque 2.2 pour obtenir la dernière inclusion. La propriété 2 est immédiatement vérifiée. \square

Avant de poursuivre, revenons sur la remarque 1.14. Lorsque certaines composantes connexes de N_X sont homéomorphes à l'anneau ou au tore, il n'y a pas unicité, s'il existe, du relèvement $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}$. Nous avons expliqué dans l'introduction que cela justifiait la présence de la troisième condition dans les conclusions du théorème 0.1. Un exemple d'une telle situation est donné par l'homéomorphisme $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par :

$$F(z) = e^{8i \arctan(|z|)} z.$$

L'ensemble $X = \text{Fix}(F)$ est la réunion du cercle unité et du point 0. On cherche un relèvement $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}$: choisissons celui qui est associé à la restriction à N_X de l'isotopie I définie par :

$$\phi : \begin{array}{ccc} [0, 1] \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (t, z) & \mapsto & e^{8it \arctan(|z|)} z \end{array}.$$

Ce relèvement, simple à construire, vérifie les deux premières conditions du théorème 0.1 mais pas la troisième.

Pour le voir, considérons par exemple le sous-ensemble $Y = \{0, 1\}$ de X . Pour satisfaire la troisième condition, il faudrait d'abord trouver un relèvement $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$. D'après la remarque 1.14, N_Y n'étant homéomorphe ni à l'anneau ni au tore, un tel relèvement est unique. C'est donc nécessairement celui qui est associé à la restriction à N_Y de l'isotopie J définie par :

$$\psi : \begin{array}{ccc} [0, 1] \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (t, z) & \mapsto & e^{it(8 \arctan(|z|) - 2\pi)} z \end{array} .$$

Mais les chemins $t \mapsto \phi(t, \sqrt{3}) = e^{\frac{8it\pi}{3}} \sqrt{3}$ et $t \mapsto \psi(t, \sqrt{3}) = e^{\frac{2it\pi}{3}} \sqrt{3}$ ne sont pas homotopes à extrémités fixées dans N_Y . Le relèvement (X, \hat{F}_X) ne vérifie donc pas la fin de la troisième condition.

Cependant, l'isotopie J est mieux choisie que la précédente car elle vérifie $\text{Fix}(J) = X$, ce qui montre d'ailleurs que X est fortement non enlacé. À la restriction de J à N_X est associé un relèvement (X, \hat{F}'_X) . C'est celui que l'on obtient à partir de la notion de non enlacement fort et le seul à vérifier la troisième condition du théorème 0.1. On peut caractériser ce relèvement : c'est le seul qui appartient à l'ensemble \mathcal{R}' suivant.

Définition 2.6. On note \mathcal{R}' l'ensemble des couples $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}$ tels que pour tout sous-ensemble fermé $Y \subset X$, il existe $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Y, \hat{F}_Y) \preccurlyeq (X, \hat{F}_X)$. La relation \preccurlyeq définit un ordre sur \mathcal{R}' .

Avant de poursuivre, et pour clarifier les idées, vérifions que l'unicité du relèvement, qui a motivé l'introduction de \mathcal{R}' , est bien une propriété vérifiée dans \mathcal{R}' .

Proposition 2.7. Soit $X \subset \text{Fix}(F)$ un sous-ensemble fermé non enlacé. On exclut les cas particuliers suivants :

- M est l'anneau ou le tore et X est l'ensemble vide ;
- M est le disque et X un singleton ;
- M est la sphère et X est de cardinal 2.

Alors il existe au plus un relèvement $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}'$.

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.8. Soit $X \subset M$ une partie fermée et $\Gamma \subset N_X$ un lacet. Alors Γ est homotope à zéro dans N_X si et seulement si Γ est homotope à zéro dans N_Z pour toute partie finie $Z \subset X$.

Démonstration du lemme 2.8. Si Γ est homotope à zéro dans N_X , alors pour toute partie finie $Z \subset X$ on a $N_X \subset N_Z$ donc Γ est homotope à zéro dans N_Z .

Réciproquement, supposons que pour toute partie finie $Z \subset X$, le lacet Γ est homotope à zéro dans N_Z . Considérons une surface à bord compacte connexe $K_\Gamma \subset N_X$ contenant Γ . Un nombre fini de composantes connexes de $M \setminus K_\Gamma$ contiennent des points de X . Pour chaque composante connexe C de $M \setminus K_\Gamma$ rencontrant X , on choisit un point $z_C \in C \cap X$. On note Z l'ensemble fini obtenu par réunion de ces points. Enfin, on note N la réunion de K_Γ et des composantes connexes de $M \setminus K_\Gamma$ qui ne rencontrent pas C .

Considérons le revêtement universel $\hat{\pi} : \hat{N}_Z \rightarrow N_Z$ de N_Z et une composante connexe $\hat{N} \subset \hat{N}_Z$ de la préimage de N par $\hat{\pi}$. Le lacet Γ se relève à \hat{N} en un chemin $\hat{\Gamma}$ issu de \hat{z} qui est un lacet puisque, par hypothèse, Γ est homotope à zéro dans N_Z . Par ailleurs, remarquons que \hat{N} est simplement connexe car s'il existait une composante connexe bornée de $\hat{N}_Z \setminus \hat{N}$, elle se projetterait sur une composante connexe de $M \setminus N$ ne rencontrant pas Z ce qui contredirait la construction de N et Z . Le lacet $\hat{\Gamma}$ est donc homotope à zéro dans \hat{N} et son projeté Γ est donc homotope à zéro dans $N \subset N_X$ donc dans N_X . \square

Démonstration de la proposition 2.7. L'unicité de (X, \hat{F}_X) est immédiate lorsque le groupe des automorphismes du revêtement universel de N_X est de centre trivial. Lorsque X est fini, cette propriété est toujours vérifiée ici compte tenu des cas particuliers que nous avons exclus.

Supposons maintenant X infini. Soient deux relèvements $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}'$ et $(X, \hat{G}_X) \in \mathcal{R}'$. Choisissons un point $z \in N_X$ et deux lacets α et β issus de z , le premier associé à \hat{F}_X et le second à \hat{G}_X . Considérons maintenant le lacet $\Gamma = \alpha.\beta^-$.

Pour tout sous-ensemble fini $Z \subset X$ de cardinal au moins 3, par définition de \mathcal{R}' , on peut trouver $(Z, \hat{F}_Z) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z, \hat{F}_Z) \preccurlyeq (X, \hat{F}_X)$ et $(Z, \hat{G}_Z) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z, \hat{G}_Z) \preccurlyeq (X, \hat{G}_X)$. Mais puisque Z est fini de cardinal au moins 3, le groupe des automorphismes du revêtement universel de N_Z est de centre trivial et \hat{F}_Z est donc unique d'où $\hat{F}_Z = \hat{G}_Z$. Les chemins α et β sont donc tous deux associés à \hat{F}_Z donc Γ est homotope à zéro dans N_Z .

Si $Z \subset X$ est un sous-ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à 2, on peut trouver un ensemble Z' fini de cardinal 3 vérifiant $Z \subset Z' \subset X$. D'après ce qui précède, Γ est homotope à zéro dans $N_{Z'}$ donc dans N_Z comme précédemment.

Nous pouvons donc utiliser le lemme 2.8 et en déduire que Γ est homotope à zéro dans N_X ce qui montre que α et β sont homotopes dans N_X donc $\hat{F}_X = \hat{G}_X$. \square

2.2 Preuve du théorème 0.1

Nous démontrerons dans la partie 3 les résultats suivants concernant l'existence de relèvements maximaux.

Proposition 2.9. *Soient $F \in \text{Homeo}_*(M)$ et $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}$. Alors il existe $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$ maximal vérifiant $(X, \hat{F}_X) \preccurlyeq (Y, \hat{F}_Y)$.*

Proposition 2.9'. *Soient $F \in \text{Homeo}_*(M)$ et $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}'$. Alors il existe $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}'$ maximal dans \mathcal{R}' vérifiant $(X, \hat{F}_X) \preccurlyeq (Y, \hat{F}_Y)$.*

Pour prouver le théorème 0.1, il reste à montrer que les relèvements maximaux permettent l'utilisation du théorème 0.4 c'est-à-dire sont sans point fixe.

Proposition 2.10. *Soit $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}$. S'il existe un point $y \in \text{Fix}(F) \setminus X$ dont les relevés à \hat{N}_X sont des points fixes de \hat{F}_X , alors (X, \hat{F}_X) n'est pas maximal dans $(\mathcal{R}, \preccurlyeq)$.*

Plus précisément, si l'on note $Y = X \cup \{y\}$, il existe $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(X, \hat{F}_X) \preccurlyeq (Y, \hat{F}_Y)$.

Proposition 2.10'. *Soit $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}'$. S'il existe un point $y \in \text{Fix}(F) \setminus X$ dont les relevés à \hat{N}_X sont des points fixes de \hat{F}_X , alors (X, \hat{F}_X) n'est pas maximal dans $(\mathcal{R}', \preccurlyeq)$.*

Plus précisément, si l'on note $Y = X \cup \{y\}$, il existe $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}'$ vérifiant $(X, \hat{F}_X) \preccurlyeq (Y, \hat{F}_Y)$.

Remarque 2.11. Comme \hat{F}_X commute avec les automorphismes du revêtement universel $\hat{\pi}_X : \hat{N}_X \rightarrow N_X$, s'il fixe un relevé à \hat{N}_X d'un point $y \in \text{Fix}(F) \setminus X$, il les fixe tous.

Remarque 2.12. Considérons un relèvement $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}'$. D'après la proposition 2.10 (respectivement 2.10'), le relèvement (X, \hat{F}_X) est maximal dans \mathcal{R} (resp. dans \mathcal{R}') si et seulement si \hat{F}_X est sans point fixe. Ainsi (X, \hat{F}_X) est maximal dans \mathcal{R} si et seulement si il est maximal dans \mathcal{R}' .

Avant de démontrer les propositions 2.10 et 2.10' dans le paragraphe suivant, nous allons prouver le théorème 0.1. Nous nous appuyons pour cela sur les propositions 2.10' démontrée ci-après et 2.9' démontrée dans la partie 3. Signalons que pour obtenir la troisième condition dans le théorème 0.1, nous utilisons ces propositions et non pas les propositions 2.10 et 2.9 ; nous donnerons cependant une preuve de l'ensemble de ces résultats.

Démonstration du théorème 0.1. Considérons $(\emptyset, \tilde{F}) \in \mathcal{R}'$ où \tilde{F} est le relèvement associé à I de F au revêtement universel \tilde{M} de M . D'après la proposition 2.9', il existe $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}'$ maximal et vérifiant $(\emptyset, \tilde{F}) \preccurlyeq (X, \hat{F}_X)$, ce qui signifie que tout chemin associé à \hat{F}_X est aussi associé à \tilde{F} . De plus, d'après la proposition 2.10', \hat{F}_X n'a pas de point fixe. \square

2.3 Éléments maximaux de (\mathcal{R}, \preceq) et (\mathcal{R}', \preceq)

L'objet de ce paragraphe est la preuve des propositions 2.10 et 2.10'. Celle-ci s'appuie sur la proposition 2.13 qui découle du lemme d'Alexander mais dont nous donnerons une démonstration complète dans la partie 4. Il s'agit d'une formulation de la proposition 2.10 dans le langage des isotopies restreintes. Pour déduire les propositions 2.10 et 2.10' de la proposition 2.13, nous allons utiliser le théorème d'Epstein (proposition 1.13, (P3) \Rightarrow (P1)). Signalons que notre preuve du théorème 0.1 fait appel au théorème d'Epstein uniquement pour ces preuves des propositions 2.10 et 2.10'.

Proposition 2.13. *Soient $F \in \text{Homeo}_*(M)$ et $(X, I) \in \mathcal{I}$ une isotopie restreinte. Soient $y \in \text{Cont}(I) \setminus \text{Fix}(I)$ et $Y = X \cup \{y\}$. Alors il existe $(X, I') \in \mathcal{I}$ avec I' isotopie de id_{N_X} à F fixant y et homotope à I relativement au complémentaire d'un compact de N_X .*

Démonstration de la proposition 2.10. Remarquons d'abord qu'il suffit de s'intéresser à la composante connexe N de N_X qui contient le point y . En effet, les autres composantes connexes sont inchangées lorsque l'on enlève y et leur revêtement universel est également inchangé. Pour simplifier les notations, nous supposons donc N_X connexe.

Utilisons le théorème d'Epstein. D'après la proposition 1.13 et la remarque 1.14, il existe une isotopie restreinte (X, I_X) telle que (X, \hat{F}_X) soit associé à (X, I_X) . D'après la proposition 2.13, on peut modifier (X, I_X) pour obtenir une isotopie (X, J_Y) qui fixe y . Considérons le relèvement $(X, \hat{F}_{J_Y}) \in \mathcal{R}$ associé à l'isotopie restreinte (X, J_Y) . Comme \hat{F}_{J_Y} est un relèvement de $F|_{N_X}$ qui fixe les relevés de y , c'est \hat{F}_X .

Notons I_Y la restriction de J_Y à N_Y et considérons le relèvement $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$ associé à l'isotopie restreinte (Y, I_Y) . Il reste à vérifier que l'on a bien $(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$:

1. par hypothèse, $Y = X \cup \{y\}$ vérifie $X \subset Y \subset (X \cup \hat{\pi}_X(\text{Fix}(\hat{F}_X)))$;
2. soit $z \in N_Y$. Considérons le chemin $I_Y(z)$ qui n'est autre que $J_X(z)$. Il est donc associé à \hat{F}_Y mais aussi à \hat{F}_X , ce qui achève la démonstration d'après la remarque 2.4. \square

Nous pouvons également démontrer facilement la proposition 2.10' dans le cas particulier où X est totalement discontinu. Cette situation est relativement simple car Y est alors fortement non enlacé (voir la remarque 1.16).

Démonstration de la proposition 2.10' lorsque X est totalement discontinu. D'après la proposition 1.13, il existe une isotopie restreinte $(X, I_X) \in \mathcal{I}$ associée au relèvement (X, \hat{F}_X) . Comme les points de X sont isolés, cette isotopie se prolonge en une isotopie I définie sur M et fixant les points de X . Par hypothèse, les relevés de y à \hat{N}_X sont des points fixes de \hat{F}_X . D'après la proposition 2.13 on peut modifier I en une isotopie J qui fixe les points de Y . À la restriction à N_Y de l'isotopie J est associé un relèvement $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$.

Montrons que (Y, \hat{F}_Y) appartient à \mathcal{R}' . En effet, pour tout sous-ensemble $Z \subset Y$, la restriction de J à N_Z permet de définir un relèvement $(Z, \hat{F}_Z) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z, \hat{F}_Z) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$ puisque pour tout point $z \in N_Y$, le chemin $J(z)$ est associé à \hat{F}_Y et à \hat{F}_Z . \square

Intéressons-nous maintenant à la proposition 2.10' dans le cas où X n'est pas totalement discontinu. Pour la démontrer, nous allons utiliser les lemmes suivants :

Lemme 2.14. *Soient (Z, \hat{F}_Z) et (Y, \hat{F}_Y) deux éléments de \mathcal{R} vérifiant $Z \subset Y \subset (Z \cup \hat{\pi}_Z(\text{Fix}(\hat{F}_Z)))$. On suppose de plus que l'ensemble Z contient un point y isolé dans Y et que les composantes connexes de N_Z et de N_Y qui contiennent y dans leur adhérence ne sont homéomorphes ni à l'anneau ouvert, ni au disque.*

Alors, tout anneau $A \subset N_Y$ entourant y (c'est-à-dire tel que $A \cup \{y\}$ soit un disque) contient des chemins associés à \hat{F}_Y . Ces chemins sont de plus associés à \hat{F}_Z . Dans le cas particulier où N_Y est connexe, cela signifie que l'on a $(Z, \hat{F}_Z) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$.

Démonstration. D'après la proposition 1.13, il existe une isotopie (Z, I_Z) (respectivement (Y, I_Y)) tel que (Z, \hat{F}_Z) soit associé à (Z, I_Z) (resp. (Y, \hat{F}_Y) soit associé à (Y, I_Y)). Comme y est un point de Z isolé dans Y donc dans Z , le lacet $\beta = (I_Y \cdot (I_Z)^-)(w)$ est contenu dans A si l'on choisit w suffisamment proche de y . Choisissons un tel point w puis un lacet $\Gamma \subset N_Y$ basé en w et non homotope à zéro dans $N_Y \cup \{y\}$. Si l'on suppose que N_Y n'est homéomorphe ni à l'anneau ni au disque, un tel choix est possible puisque $N_Y \cup \{y\}$ ne peut alors être homéomorphe ni au disque ni à la sphère.

On note C_Z la composante connexe de N_Z dont l'adhérence contient y ; elle contient également w . On note également $\hat{\pi} : \hat{C}_Z \rightarrow C_Z$ le revêtement universel de C_Z et \hat{G} le groupe des automorphismes de revêtement. Choisissons un relèvement $\hat{w} \in \hat{C}_Z$ de w et notons $\hat{\beta}$ et $\hat{\Gamma}$ les relèvements de β et Γ issus de \hat{w} . L'extrémité de $\hat{\beta}$ relève w et s'écrit donc sous la forme $\hat{T}(\hat{w})$ avec $\hat{T} \in \hat{G}$. De même, l'extrémité de $\hat{\Gamma}$ s'écrit $\hat{U}(\hat{w})$ avec $\hat{U} \in \hat{G}$. Remarquons maintenant que I_Y définit dans N_Y , donc dans N_Z , et plus précisément dans C_Z , une homotopie entre Γ et $F(\Gamma)$. L'isotopie $(I_Z)^-$ définit ensuite une homotopie entre $F(\Gamma)$ et Γ toujours dans C_Z . En relevant à \hat{C}_Z ces deux homotopies successives, on obtient une homotopie libre entre $\hat{\Gamma}$ et $\hat{T}(\hat{\Gamma})$. Le long de cette homotopie, l'origine de $\hat{\Gamma}$ décrit $\hat{\beta}$ et son extrémité $\hat{U}(\hat{w})$ décrit $\hat{U}(\hat{\beta})$ d'extrémité $\hat{U} \circ \hat{T}(\hat{w})$. Or l'extrémité de $\hat{T}(\hat{\Gamma})$ est $\hat{T} \circ \hat{U}(\hat{w})$ et on obtient ainsi $\hat{U} \circ \hat{T}(\hat{w}) = \hat{T} \circ \hat{U}(\hat{w})$ donc $\hat{U} \circ \hat{T} = \hat{T} \circ \hat{U}$.

Comme l'on suppose que C_Z n'est homéomorphe ni au disque, ni à l'anneau, on en déduit que \hat{U} et \hat{T} appartiennent à un même sous-groupe monogène infini de \hat{G} . Il existe donc $(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\hat{T}^k = \hat{U}^l$ ce qui signifie que β^k et Γ^l sont librement homotopes dans C_Z donc dans $C_Z \cup \{y\}$. Or β est homotope à zéro dans $C_Z \cup \{y\}$ puisque l'on a choisi w de sorte que β soit contenu dans l'anneau A autour de y . En revanche, Γ^l n'est homotope à zéro dans $C_Z \cup \{y\}$ que si $l = 0$ auquel cas, on obtient que \hat{T}^k est l'identité avec $k \neq 0$ donc \hat{T} est l'identité. Ainsi le lacet β est homotope à zéro dans C_Z . On en déduit que $I_Y(w)$, qui est associé à \hat{F}_Y , est homotope à extrémités fixées dans C_Z à $I_Z(w)$ lui-même associé à \hat{F}_Z . Ainsi $I_Y(w)$ est associé à \hat{F}_Y et à \hat{F}_Z . Par connexité de l'anneau A , tout chemin contenu dans A et associé à \hat{F}_Y sera également associé à \hat{F}_Z ce qui achève la démonstration. \square

Nous allons également utiliser un lemme topologique qui repose sur des arguments du type lemme d'Alexander :

Lemme 2.15. *Soit D un disque ouvert contenu dans un ouvert N d'une surface M . Soient y et y' deux points de D . Soient α et β deux chemins contenus dans $N \setminus \bar{D}$, ayant même origine z et même extrémité z' .*

Si α et β sont homotopes à extrémités fixées dans $N \setminus \{y'\}$, alors ils sont homotopes à extrémités fixées dans $N \setminus \{y\}$.

Démonstration. Soit $\phi : [0, 1]^2 \rightarrow N$ une homotopie entre α et β , à valeurs dans $N \setminus \{y\}$ c'est-à-dire vérifiant :

- pour tout $t \in [0, 1]$, $\phi(0, t) = \alpha(t)$ et $\phi(1, t) = \beta(t)$;
- pour tout $s \in [0, 1]$, $\phi(s, 0) = z$ et $\phi(s, 1) = z'$.

Comme \bar{D} est fermé, et α, β sont contenus dans son complémentaire, il existe $\epsilon \in]0, 1[$ tel que pour tout $(s, t) \in ([0, \epsilon] \cup [1 - \epsilon, 1]) \times [0, 1]$ l'on ait $\phi(s, t) \notin \bar{D}$. Par ailleurs, on peut construire une isotopie $(\psi_s)_{s \in [0, 1]}$ entre l'identité id_N et elle-même, à support dans D , vérifiant :

$$\forall s \in [\epsilon, 1 - \epsilon] \quad \psi_s(y') = y$$

Une construction plus détaillée de ce type d'application figure dans la partie 4. L'application $(s, t) \mapsto \psi_s(\phi(s, t))$ réalise une homotopie entre α et β dans $N \setminus \{y\}$ car $\phi(s, t)$ ne vaut jamais y' donc $\psi_s(\phi(s, t))$ n'est jamais y . \square

Nous supposons ici que X n'est pas totalement discontinu, et en particulier que X est infini. Dans la preuve de la proposition 2.10, nous avons en général construit le seul relèvement (Y, \hat{F}_Y) possible sauf dans un cas bien particulier : lorsque la composante C_X de N_X contenant y est un disque. En effet, dans ce cas, le groupe des automorphismes de revêtement de $C_Y = C_X \setminus \{y\}$ n'est pas de centre trivial (voir remarque 1.5).

Une première étape de la preuve va consister à choisir \hat{F}_Y convenablement lorsque C_X est un disque ; ce relèvement \hat{F}_Y sera fourni par la proposition qui suit.

Proposition 2.16. *Soient $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}'$ et $y \in \text{Fix}(F) \setminus X$ tel que les relevés de y à \hat{N}_X soient des points fixes de \hat{F}_X . On suppose X de cardinal supérieur ou égal à 2, on note C_X la composante connexe de N_X contenant y et $C_Y = C_X \setminus \{y\}$.*

Alors, il existe un unique relèvement $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$ vérifiant :

1. $(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$;
2. *pour tout sous-ensemble fini $Z_1 \subset X$ de cardinal supérieur ou égal à 2, en notant $Z = Z_1 \cup \{y\}$ et $(Z, \hat{F}_Z) \in \mathcal{R}$ l'unique relèvement correspondant, tout chemin de C_Y associé à \hat{F}_Y est associé à \hat{F}_Z .*

Démonstration. Commençons par vérifier, pour tout sous-ensemble $Z_1 \subset X$ de cardinal supérieur ou égal à 2, l'existence et l'unicité de $(Z, \hat{F}_Z) \in \mathcal{R}$ où l'on a posé $Z = Z_1 \cup \{y\}$. D'après l'hypothèse $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}'$, il existe $(Z_1, \hat{F}_{Z_1}) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z_1, \hat{F}_{Z_1}) \preceq (X, \hat{F}_X)$. On en déduit, puisque les relevés de y sont des points fixes de \hat{F}_X , qu'ils sont également points fixes de \hat{F}_{Z_1} d'où l'existence de $(Z, \hat{F}_Z) \in \mathcal{R}$ d'après la proposition 2.10. L'unicité de (Z, \hat{F}_Z) provient quant à elle de la remarque 1.5 car Z est fini de cardinal supérieur ou égal à 3.

Nous allons maintenant procéder en deux étapes. Dans un premier temps, nous allons montrer que pour tout sous-ensemble fini $Z_1 \subset X$ de cardinal supérieur ou égal à 2, en posant $Z = Z_1 \cup \{y\}$, il existe un unique relèvement $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$ et tout chemin de C_Y associé à \hat{F}_Y est associé à \hat{F}_Z . Dans un second temps, nous montrerons que ce relèvement (Y, \hat{F}_Y) ne dépend pas de Z_1 ; la démonstration sera alors achevée.

Construction de (Y, \hat{F}_Y) pour un sous-ensemble fini $Z_1 \subset X$ fixé, de cardinal supérieur ou égal à 2. Remarquons que l'on peut travailler indépendamment sur chaque composante connexe de N_X . Sur le revêtement universel des composantes connexes de N_X autres que C_X , la première condition impose de choisir \hat{F}_Y coïncidant avec \hat{F}_X autrement dit l'on définit \hat{F}_Y à partir des chemins associés à \hat{F}_X qui seront également associés à \hat{F}_Y .

Intéressons-nous maintenant à C_X et distinguons deux cas :

- si C_X n'est pas homéomorphe au disque, l'existence de $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$ est assurée par la proposition 2.10 et son unicité par la remarque 1.5. Par ailleurs, le lemme 2.14 appliqué à (Z, \hat{F}_Z) , (Y, \hat{F}_Y) et au point isolé y assure l'existence de chemins de C_Y associés à \hat{F}_Y et à \hat{F}_Z .
- si C_X est homéomorphe au disque, utilisons la proposition 1.13 : il existe une isotopie restreinte (Z, J_Z) telle que (Z, \hat{F}_Z) soit associé à (Z, J_Z) . Si $w \in C_X$ est suffisamment proche de y isolé dans Z , alors $J_Z(w)$ est contenu dans l'anneau C_Y . Parmi les relèvements \hat{F}_Y possibles (il en existe d'après la proposition 2.10), on choisit celui associé à $J_Z(w)$ et on obtient la propriété recherchée.

Le relèvement (Y, \hat{F}_Y) construit ne dépend pas de Z_1 . Cette propriété est immédiate lorsque C_X n'est pas homéomorphe au disque, puisque l'on a alors unicité d'un relèvement (Y, \hat{F}_Y) vérifiant $(X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$ (remarque 1.5). Nous allons maintenant chercher à la démontrer lorsque C_X est homéomorphe au disque.

Soient $Z_1 \subset X$ et $Z'_1 \subset X$ deux sous-ensembles finis de cardinaux supérieur ou égal à 2. On note $Z = Z_1 \cup \{y\}$, $Z' = Z'_1 \cup \{y\}$ puis $Z''_1 = Z_1 \cup Z'_1$ et $Z'' = Z''_1 \cup \{y\}$. La construction précédente fournit trois relèvements (Y, \hat{F}_Y) , $(Y', \hat{F}_{Y'})$ et $(Y'', \hat{F}_{Y''})$ tels que les chemins de C_Y associés à \hat{F}_Y , $\hat{F}_{Y'}$ et $\hat{F}_{Y''}$ soient également associés respectivement à \hat{F}_Z , $\hat{F}_{Z'}$ et $\hat{F}_{Z''}$. D'après le lemme 2.14 appliqué à (Z, \hat{F}_Z) et $(Z'', \hat{F}_{Z''})$ d'une part, à $(Z', \hat{F}_{Z'})$ et $(Z'', \hat{F}_{Z''})$ d'autre part, le point isolé étant y , on a $(Z, \hat{F}_Z) \preceq (Z'', \hat{F}_{Z''})$ et $(Z', \hat{F}_{Z'}) \preceq (Z'', \hat{F}_{Z''})$. Un chemin de C_Y associé à $\hat{F}_{Y''}$ est associé à $\hat{F}_{Y'}$ mais il est donc également associé à \hat{F}_W et $\hat{F}_{W'}$ donc à \hat{F}_Y et $\hat{F}_{Y'}$ d'après la construction de \hat{F}_Y et $\hat{F}_{Y'}$. On en déduit $\hat{F}_{Y'} = \hat{F}_Y$ comme espéré. \square

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2.10'.

Démonstration de la proposition 2.10' dans le cas général. On suppose ici X infini, le cas fini ayant déjà été traité. La proposition 2.16 fournit un relèvement (Y, \hat{F}_Y) bien déterminé. Nous considérons désormais ce relèvement.

Nous pouvons maintenant **vérifier que (Y, \hat{F}_Y) appartient à \mathcal{R}'** . Considérons donc un sous-ensemble fermé Z de $Y = X \cup \{y\}$ et montrons l'existence de $(Z, \hat{F}_Z) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z, \hat{F}_Z) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$. Il n'est pas restrictif de supposer que Z est de cardinal supérieur ou égal à 3. En effet, si Z est de cardinal au plus 2, on peut choisir Z' de cardinal 3 vérifiant $Z \subset Z' \subset Y$. Si l'on sait construire $(Z', \hat{F}_{Z'}) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z', \hat{F}_{Z'}) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$, alors Z' est fortement non enlacé (et $\hat{F}_{Z'}$ est unique) et on peut donc trouver $(Z, \hat{F}_Z) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z, \hat{F}_Z) \preceq (Z', \hat{F}_{Z'}) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$. On considère donc Z de cardinal supérieur ou égal à 3. Deux cas se présentent.

Le **premier cas** est celui où Z est un sous-ensemble fermé de X . Dans ce cas, puisque (X, \hat{F}_X) appartient à \mathcal{R}' , il existe $(Z, \hat{F}_Z) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z, \hat{F}_Z) \preceq (X, \hat{F}_X)$ et par transitivité $(Z, \hat{F}_Z) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$.

Le **deuxième cas** est celui où Z est de la forme $Z = Z_1 \cup \{y\}$ avec Z_1 sous-ensemble fermé de X . On note C_{Z_1} la composante connexe de N_{Z_1} qui contient y et $C_Z = C_{Z_1} \setminus \{y\}$. Comme précédemment, puisque (X, \hat{F}_X) appartient à \mathcal{R}' , on sait qu'il existe $(Z_1, \hat{F}_{Z_1}) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z_1, \hat{F}_{Z_1}) \preceq (X, \hat{F}_X) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$. La proposition 2.10 assure l'existence d'un relèvement $(Z, \hat{F}_Z) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Z_1, \hat{F}_{Z_1}) \preceq (Z, \hat{F}_Z)$. On a vu qu'il y a en général unicité de ce relèvement sauf dans le cas particulier où C_Z est homéomorphe à l'anneau et il faut alors choisir \hat{F}_Z convenablement. Soit $A \subset C_Y$ un anneau autour de y , de sorte que $A \cup \{y\}$ soit un disque. Lorsque C_Z est homéomorphe à l'anneau, on choisit le revêtement \hat{F}_Z tel que les chemins contenus dans A et associés à \hat{F}_Y (il en existe) soient associés à \hat{F}_Z .

Il faut maintenant vérifier que l'on a $(Z, \hat{F}_Z) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$. D'après la remarque 2.4, il suffit de montrer que dans chaque composante de N_Y , il existe un chemin associé à \hat{F}_Y et \hat{F}_Z . Plus précisément, il suffit de montrer ce résultat dans chaque composante connexe de $C_Z \cap N_X$. En effet, par construction de \hat{F}_Z , dans les composantes connexes de N_Z autres que C_Z , les chemins associés à \hat{F}_Z sont les chemins associés à \hat{F}_{Z_1} qui vérifie $(Z_1, \hat{F}_{Z_1}) \preceq (Y, \hat{F}_Y)$.

1. Intéressons-nous d'abord à la **composante connexe** $U^* = C_X$ de $C_Z \cap N_X$ bordant y . Plusieurs cas se présentent :

- (a) si C_Z est homéomorphe à l'anneau, on a choisi \hat{F}_Z de sorte que U^* contienne un chemin adapté à \hat{F}_Y et à \hat{F}_Z ;
- (b) si C_Z n'est pas homéomorphe à l'anneau, on considère un sous-ensemble fini $W_1 \subset Z_1$ de cardinal au moins 2 et on note $W = W_1 \cup \{y\}$. Considérons un anneau $A \subset N_Y$ autour de y (tel que $A \cup \{y\}$ soit un disque). On sait qu'il existe un unique relèvement $(W, \hat{F}_W) \in \mathcal{R}$ et que A contient un chemin α associé à \hat{F}_W .

Considérons tout d'abord l'inclusion $W \subset Z$ avec W contenant y isolé dans Z , C_Z non homéomorphe à l'anneau, de même que la composante connexe de N_W bordant y (car W_1 est fini de cardinal au moins 2). Le lemme 2.14 assure que α est associé à \hat{F}_Z .

Considérons ensuite l'inclusion $W \subset Y$. D'après la proposition 2.16, α est aussi associé à \hat{F}_Y . On a obtenu un chemin $\alpha \in U^*$ associé à \hat{F}_Z et \hat{F}_Y .

2. Intéressons-nous maintenant aux autres composantes connexes de $C_Z \cap N_X$ et choisissons donc une composante connexe U de $C_Z \cap N_X$ autre que U^* . D'après la proposition 1.13, il existe une isotopie restreinte (Y, I_Y) associée à \hat{F}_Y . Il faut montrer que $I_Y(z)$ est également associée à \hat{F}_Z , pour un point $z \in U$.

Pour cela, considérons un point $w \in \partial U$ accessible par un arc simple β à valeurs dans U (voir figure 1). On considère de même un point $w' \in \partial U^*$ distinct de w et accessible par un arc simple β' à valeurs dans U^* issu de y . Notons $W_1 = Z_1 \cup \{w, w'\}$ et $W = Z \cup \{w, w'\} = Z_1 \cup \{w, w', y\}$. Puisque (X, \hat{F}_X) appartient à \mathcal{R}' , il existe $(W_1, \hat{F}_{W_1}) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(W_1, \hat{F}_{W_1}) \preceq (X, \hat{F}_X)$. La proposition 2.10 assure l'existence d'un relèvement $(W, \hat{F}_W) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(W_1, \hat{F}_{W_1}) \preceq (W, \hat{F}_W)$. Il existe comme précédemment une isotopie restreinte (W, I_W) associée à (W, \hat{F}_W) (qui se prolonge en (W_1, I_{W_1}) associée à \hat{F}_{W_1}).

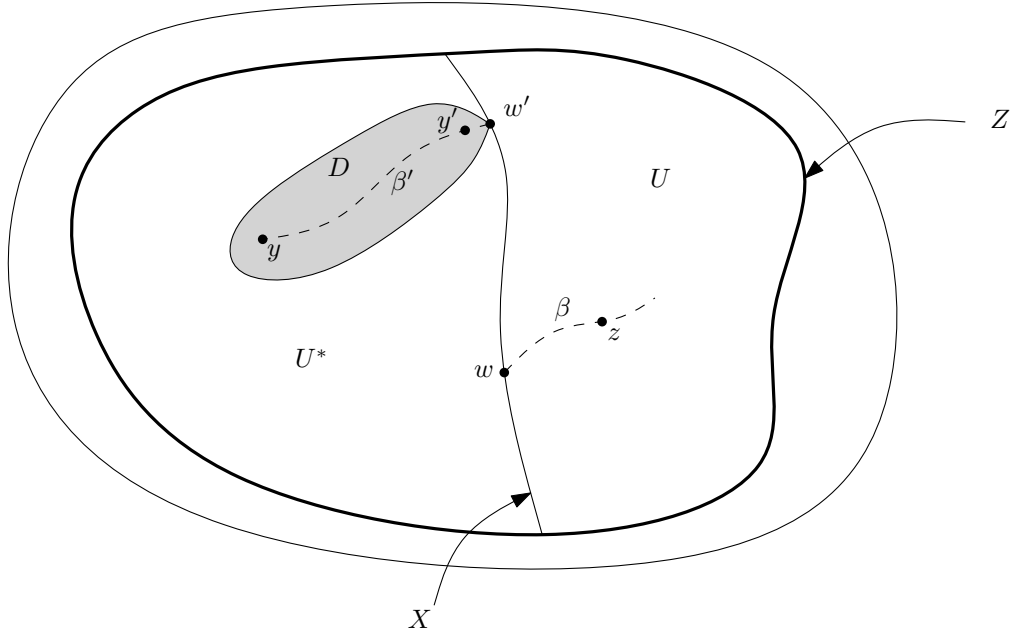


FIGURE 1 – Démonstration de la proposition 2.10'

Si $z \in \beta$ est suffisamment proche de w , alors les deux arcs $I_Y(z)$ et $I_W(z)$ sont disjoints de β' . On peut alors trouver un disque ouvert $D \subset N_X$ vérifiant $w' \in \partial D$ et $\beta' \subset (D \cup \{w'\})$ et tel que $I_X(z)$ et $I_W(z)$ ne rencontrent pas \overline{D} . Or on a $(W_1, \hat{F}_{W_1}) \preccurlyeq (X, \hat{F}_X)$ donc $I_Y(z)$ est homotope dans N_{W_1} à $I_W(z)$. Si $y' \in \beta'$ est suffisamment proche de w' , $I_Y(z)$ et $I_W(z)$ sont homotopes dans $N_{W_1} \setminus \{y'\}$. D'après le lemme 2.15, les chemins $I_Y(z)$ et $I_W(z)$ sont donc homotopes à extrémités fixées dans $N_{W_1} \setminus \{y'\} = N_W$. Or $I_W(z)$ est associé à \hat{F}_W donc $I_Y(z)$ l'est aussi. Ainsi, on a bien trouvé un chemin $I_Y(z)$ associé à \hat{F}_Y et \hat{F}_Z comme attendu. \square

3 Existence de relèvements maximaux

3.1 Suites croissantes de $(\mathcal{R}, \preccurlyeq)$

Ce paragraphe est consacré à la démonstration des propositions 2.9 et 2.9'. L'existence de relèvements maximaux dans $(\mathcal{R}, \preccurlyeq)$ repose sur le lemme de Zorn. L'essentiel des difficultés consiste à montrer la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit $F \in \text{Homeo}_*(M)$. Soit $(X_n, \hat{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante dans $(\mathcal{R}, \preccurlyeq)$. Alors la suite admet un majorant $(X_\infty, \hat{F}_\infty) \in \mathcal{R}$ vérifiant $X_\infty = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n}$.*

Proposition 3.1'. *Soit $F \in \text{Homeo}_*(M)$. Soit $(X_n, \hat{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante dans $(\mathcal{R}', \preccurlyeq)$. Alors la suite admet un majorant $(X_\infty, \hat{F}_\infty) \in \mathcal{R}'$ vérifiant $X_\infty = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n}$.*

Démonstration de la proposition 2.9. Rappelons que l'on suppose donné $(X, \hat{F}_X) \in \mathcal{R}$. On utilise le lemme de Zorn avec l'ensemble \mathcal{E} des relèvements $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$ qui vérifient $(X, \hat{F}_X) \preccurlyeq (Y, \hat{F}_Y)$. On va donc montrer que \mathcal{R} est inductif. Soit $\mathcal{F} = (Y_j, \hat{F}_j)_{j \in J}$ une famille de \mathcal{E} totalement ordonnée. Si \mathcal{F} contient un élément maximal, la démonstration est achevée. Sinon, l'ensemble $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$

est distinct de chaque Y_j d'après la remarque 2.3. Comme M est séparable, on peut trouver une suite croissante d'ensembles finis $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \subset Y \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n} = \overline{Y}.$$

Or, \mathcal{F} est totalement ordonnée. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, comme X_n est fini et contenu dans Y , il existe donc un ensemble Y_{j_n} contenant X_n . Nous allons maintenant extraire de la suite $(Y_{j_n}, \hat{F}_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite strictement croissante dans (\mathcal{R}, \preceq) .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, puisque Y_{j_n} est distinct de Y , il existe un entier $m > n$ tel que l'on n'ait pas $X_m \subset Y_{j_n}$, ni *a fortiori* $Y_{j_m} \subset Y_{j_n}$. Comme \mathcal{F} est totalement ordonnée, on en déduit $(Y_{j_n}, \hat{F}_{j_n}) \preceq (Y_{j_m}, \hat{F}_{j_m})$ avec $Y_{j_n} \neq Y_{j_m}$. Il existe donc une sous-suite $(Y_{j_{\varphi(n)}}, \hat{F}_{j_{\varphi(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(Y_{j_n}, \hat{F}_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$, strictement croissante dans (\mathcal{R}, \preceq) . D'après la proposition 3.1, cette sous-suite est majorée par un élément de la forme $(\overline{Y}, \hat{F}_\infty) \in \mathcal{R}$.

Il reste à vérifier que $(\overline{Y}, \hat{F}_\infty)$ majore bien tous les éléments de \mathcal{F} . Soit $(Y', \hat{F}') \in \mathcal{F}$ un tel élément. Si on avait $X_n \subset Y'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aurait aussi $\overline{Y} \subset Y'$, ce dernier ensemble étant fermé. Comme \mathcal{F} est totalement ordonnée, (Y', \hat{F}') serait alors un élément maximal de \mathcal{F} , ce qui contredit l'hypothèse. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on n'ait pas $X_n \subset Y'$ ce qui entraîne $(Y', \hat{F}') \preceq (Y_{j_n}, \hat{F}_{j_n}) \preceq (Y_\infty, \hat{F}_\infty)$. Le relèvement $(Y_\infty, \hat{F}_\infty)$ est bien un majorant de \mathcal{F} . \square

Démonstration de la proposition 2.9'. La démonstration est identique à celle de la proposition 2.9 en remplaçant \mathcal{R} par \mathcal{R}' et en utilisant la proposition 3.1' au lieu de la proposition 3.1. \square

Nous allons maintenant démontrer la proposition 3.1. Une partie de la preuve (le lemme 3.3) sera reportée au paragraphe suivant.

Démonstration de la proposition 3.1. Introduisons l'ensemble

$$X_\infty = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n} \quad \text{et son complémentaire } N_\infty = M \setminus X_\infty.$$

Le revêtement universel de N_∞ est obtenu par réunion des revêtements universels de chaque composante connexe de N_∞ . De plus, M. Brown et J.M. Kister [BK84] ont montré que F fixe les composantes connexes de N_∞ . Il suffit donc de définir \hat{F}_∞ sur chaque composante connexe de N_∞ .

Plaçons-nous dans une composante connexe N'_∞ de N_∞ . On peut alors écrire N'_∞ comme la réunion d'une suite croissante de surfaces à bord, compactes et connexes : $N'_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M'_n$ de sorte que $M \setminus M'_n$ ait toujours un nombre fini de composantes connexes [Whi57]. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous notons M_n la réunion de M'_n et des composantes connexes de $M \setminus M'_n$ qui ne rencontrent pas X_∞ . Ainsi, d'une part N'_∞ est la réunion croissante des sous-variétés connexes à bord M_n , d'autre part chaque composante connexe de $M \setminus M_n$ rencontre X_∞ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut également supposer $F(M_n) \subset M_{n+1}$.

Les composantes connexes de $M \setminus M_n$ sont en nombre fini et chacune intersecte X_∞ . Il existe donc une suite extraite $(X_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, chaque composante connexe de $M \setminus M_n$ intersecte au moins un point de $X_{\varphi(n)}$. Pour éviter d'alourdir inutilement les notations, nous pouvons remplacer la suite (X_n, \hat{F}_n) par la suite $(X_{\varphi(n)}, \hat{F}_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ou en d'autres termes supposer que les composantes connexes de $M \setminus M_n$ contiennent chacune au moins un point de X_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit également $N_n = M \setminus X_n$ et $\hat{\pi}_n : \hat{N}_n \rightarrow N_n$ son revêtement universel. Enfin, on choisit arbitrairement un point de la pré-image de M_0 par $\hat{\pi}_n$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $\hat{M}_m^n \subset \hat{N}_n$ la composante connexe de la pré-image de M_m par $\hat{\pi}_n$ contenant ce point.

Remarque 3.2. Si $n \geq m$, la composante \hat{M}_m^n est une surface à bord dont les bords sont des droites (ou un cercle dans le cas particulier où M_m est un disque). De fait, \hat{M}_m^n est simplement connexe. En effet, \hat{N}_n est simplement connexe et toutes les composantes connexes de $M \setminus M_m$ contiennent un point de X_m et donc de X_n .

Nous avons vu précédemment que lorsqu'il existe un relèvement $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$, tout lacet de N_Y est librement homotope à son image (proposition 1.13). Une première étape de la preuve de la proposition 3.1 sera de prouver le résultat *a priori* plus faible suivant que nous allons admettre momentanément.

Lemme 3.3. *Pour tout lacet $\Gamma \subset N'_\infty$, il existe une homotopie libre dans N'_∞ entre Γ et $F(\Gamma)$ qui, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est associée à \hat{F}_n .*

Achevons la preuve de la proposition 3.1 et construisons le relèvement \hat{F}_∞ . Choisissons un lacet $\Gamma \subset N'_\infty$ basé en un point $z \in N'_\infty$. D'après le lemme 3.3, il existe une homotopie libre entre Γ et $F(\Gamma)$ qui, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit associée à \hat{F}_n . Notons α le chemin décrit par z le long de cette homotopie. Nous allons montrer que ce chemin est adapté à X_∞ .

Pour cela, considérons un lacet $\gamma \subset N'_\infty$ basé en z . Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que les lacets γ et $F(\gamma)$ ainsi que le chemin α soient tous contenus dans M_n . Choisissons un relèvement $\hat{z}_n \in \hat{M}_n^n$ de z à \hat{N}_n . Alors les lacets γ et $\alpha.F(\gamma).\alpha^-$ se relèvent en deux chemins issus de \hat{z}_n entièrement contenus dans \hat{M}_n . Or α , associé à \hat{F}_n , est donc adapté à X_n d'après la proposition 1.10. Il en résulte que les lacets γ et $\alpha.F(\gamma).\alpha^-$ sont homotopes dans N_n . Leurs relèvements dans \hat{N}_n d'origine \hat{z}_n ont donc même extrémité. Comme \hat{M}_n est simplement connexe d'après la remarque 3.2, ils sont homotopes dans \hat{M}_n à extrémités fixées. Cette homotopie se projette sur une homotopie dans M_n donc dans N'_∞ entre les lacets γ et $\alpha.F(\gamma).\alpha^-$. Nous avons bien montré que α est adapté à X_∞ .

La proposition 1.10 assure l'existence de \hat{F}_∞ et le chemin α sera associé à \hat{F}_∞ . Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le chemin α est associé à \hat{F}_∞ et à \hat{F}_n , ce qui montre $(X_n, \hat{F}_n) \preccurlyeq (X_\infty, \hat{F}_\infty)$ grâce à la remarque 2.4. \square

Démonstration de la proposition 3.1'. Il faut maintenant montrer que si l'on suppose que pour tout entier n le relèvement (X_n, \hat{F}_n) appartient à \mathcal{R}' , alors $(X_\infty, \hat{F}_\infty)$ que l'on vient de construire appartient lui aussi à \mathcal{R}' . Pour cela, considérons un sous-ensemble fermé $Y \subset X_\infty$. Il suffit de montrer que le chemin α est adapté à Y . En utilisant la proposition 1.10, on en déduira qu'il existe un relèvement $(Y, \hat{F}_Y) \in \mathcal{R}$ vérifiant $(Y, \hat{F}_Y) \preccurlyeq (X_\infty, \hat{F}_\infty)$.

Soit un lacet $\Gamma \subset N_Y$ basé en z , origine de α . Notons Δ le lacet $\alpha.F(\Gamma).\alpha^-$. Comme Δ est compact et Y est fermé, on peut construire un voisinage compact de Δ qui ne rencontre pas Y et qui est une variété à bord. Notons M' la variété à bord obtenue en réunissant ce voisinage avec les composantes connexes de son complémentaire qui ne rencontrent pas Y . Remarquons que $M \setminus M'$ a un nombre fini de composantes connexes. On choisit un point $x_i \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$ dans chacune de ces composantes connexes; on obtient une famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$. Il existe donc $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que X_{j_0} contienne tous les $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$. Comme α est adapté à X_{j_0} , les lacets Γ et Δ sont homotopes dans $N_{j_0} = M \setminus X_{j_0}$.

Notons $\hat{\pi}_{j_0} : \hat{N}_{j_0} \rightarrow N_{j_0}$ le revêtement universel de N_{j_0} . Relevons Γ à \hat{N}_{j_0} en un chemin $\hat{\Gamma}$ et relevons ensuite Δ^- en $\hat{\Delta}^-$ à partir de l'extrémité de $\hat{\Gamma}$. Puisque Γ et Δ sont homotopes dans N_{j_0} , $\hat{\Gamma}.\hat{\Delta}^-$ est un lacet. On note \hat{M}' la composante connexe de $\hat{\pi}_{j_0}^{-1}(M')$ qui contient $\hat{\Gamma}$. Par construction de M' et de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$, l'ensemble \hat{M}' est simplement connexe. Le lacet $\hat{\Gamma}.\hat{\Delta}^-$ est donc contractile dans \hat{M}' . De plus, \hat{M}' ne rencontre pas la préimage par $\hat{\pi}_{j_0}$ de $Y \setminus X_{j_0}$. Il en résulte que $\hat{\Gamma}.\hat{\Delta}^-$ est contractile dans la préimage de N_Y donc $\Gamma.\Delta$ est contractile dans N_Y . On a montré, comme annoncé, que α est adapté à Y . \square

3.2 Homotopie entre tout lacet et son image

Pour démontrer le lemme 3.3, nous allons avoir besoin de deux lemmes préliminaires.

Lemme 3.4. *Soit $\Gamma \subset N'_\infty$ un lacet non contractile basé en un point $z \in M$. On se donne un entier m suffisamment grand pour que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

- les lacets Γ , $F(\Gamma)$, $F^2(\Gamma)$ sont inclus dans M_m ;
- il existe un chemin δ joignant z à $F(z)$ tel que δ et $F(\delta)$ sont inclus dans M_m .

Alors il existe une homotopie libre J_m de Γ à $F(\Gamma)$ à support dans M_m et associée à \hat{F}_m .

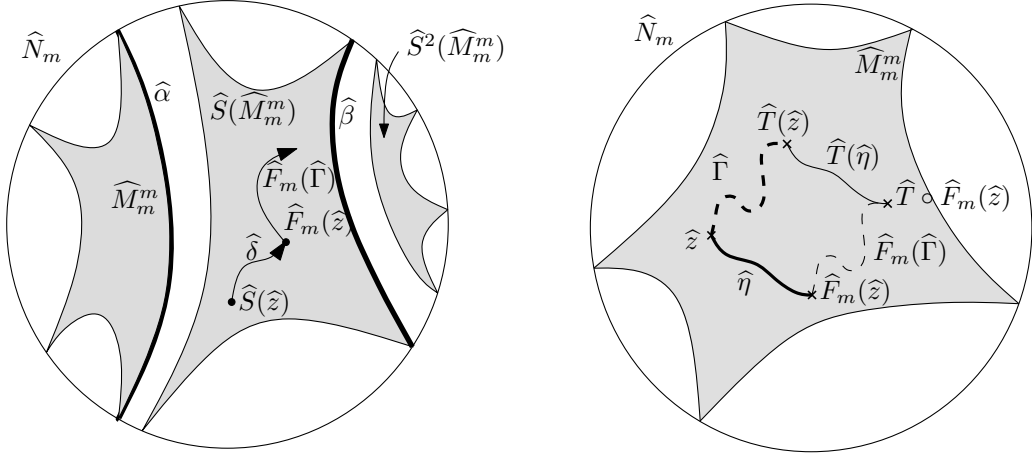


FIGURE 2 – Démonstration du lemme 3.4

Démonstration. Notons \widehat{G}_m le groupe des automorphismes de revêtement du revêtement universel $\widehat{\pi}_m : \widehat{N}_m \rightarrow N_m$. Considérons un relèvement $\widehat{\Gamma}$ de Γ à \widehat{N}_m issu d'un relevé $\widehat{z} \in \widehat{M}_m^m$ de z et commençons par montrer que $\widehat{\Gamma}$ n'est pas un lacet.

Par l'absurde, si c'était le cas, alors $\widehat{\Gamma}$ serait un lacet contenu dans \widehat{M}_m^m qui est simplement connexe d'après la remarque 3.2. Ainsi Γ serait contractile dans M_m , ce qui contredit les hypothèses du lemme. Ainsi $\widehat{\Gamma}$ n'est pas un lacet. Il en résulte que le chemin $\widehat{\Gamma}$ joint \widehat{z} à un point de la forme $\widehat{T}(\widehat{z})$, où $\widehat{T} \in \widehat{G}_m$ est distinct de l'identité.

Montrons maintenant que $\widehat{F}_m(\widehat{\Gamma})$ est contenu dans \widehat{M}_m^m et donc en particulier que $\widehat{F}_m(\widehat{z})$ appartient à \widehat{M}_m^m . Par hypothèse, $\widehat{\Gamma}$ est inclus dans \widehat{M}_m^m . On en déduit que $\widehat{T}(\widehat{z}) \in \widehat{M}_m^m$, et donc que $\widehat{T}(\widehat{M}_m^m) = \widehat{M}_m^m$. Notons $\widehat{\delta}$ le relèvement de δ à \widehat{N}_m d'extrémité $\widehat{F}_m(\widehat{z})$. L'origine de $\widehat{\delta}$ s'écrit $\widehat{S}(\widehat{z})$, où $\widehat{S} \in \widehat{G}_m$ (voir la partie gauche de la figure 2). La composante connexe de $\widehat{\pi}^{-1}(M_m)$ qui contient $\widehat{F}_m(\widehat{z})$ est donc $\widehat{S}(\widehat{M}_m^m)$. Nous allons supposer que $\widehat{S}(\widehat{M}_m^m) \neq \widehat{M}_m^m$ et aboutir à une contradiction.

Par hypothèse, nous savons que $\widehat{F}_m(\widehat{\Gamma})$ est inclus dans $\widehat{S}(\widehat{M}_m^m)$. Puisque $\widehat{F}_m(\widehat{\Gamma})$ joint $\widehat{F}_m(\widehat{z})$ à $\widehat{F}_m \circ \widehat{T}(\widehat{z}) = \widehat{T} \circ \widehat{F}_m(\widehat{z})$, on en déduit que \widehat{T} stabilise $\widehat{S}(\widehat{M}_m^m)$. Pour les mêmes raisons, cet automorphisme stabilise également $\widehat{S}^2(\widehat{M}_m^m)$. En effet, $\widehat{F}_m^2(\widehat{\Gamma})$ joint $\widehat{F}_m^2(\widehat{z})$ à $\widehat{F}_m^2 \circ \widehat{T}(\widehat{z}) = \widehat{T} \circ \widehat{F}_m^2(\widehat{z})$ et est inclus dans une composante connexe de $\widehat{\pi}^{-1}(M_m)$; il faut montrer que c'est $\widehat{S}^2(\widehat{M}_m^m)$. Il suffit pour cela de remarquer que $\widehat{F}_m^2(\widehat{z})$ appartient à $\widehat{S}^2(\widehat{M}_m^m)$. En effet, par hypothèse, on sait que $\widehat{F}_m(\widehat{\delta})$ est inclus dans une composante connexe de $\widehat{\pi}^{-1}(M_m)$, que son origine $\widehat{F}_m \circ \widehat{S}(\widehat{z}) = \widehat{S} \circ \widehat{F}_m(\widehat{z})$ est incluse dans $\widehat{S}^2(\widehat{M}_m^m)$ et que son extrémité est $\widehat{F}_m^2(\widehat{z})$.

Puisque M_m est une surface à bord, toute composante connexe γ de la préimage $\pi_m^{-1}(\partial M_m)$ de la frontière de M_m est une droite topologique proprement plongée dans \widehat{N}_m et son stabilisateur dans \widehat{G}_m est un groupe monogène infini $\widehat{G}(\gamma)$. De plus pour tout $U \in \widehat{G}_m$, s'il existe un entier $r \neq 0$ tel que $U^r \in \widehat{G}(\gamma)$, alors $U \in \widehat{G}(\gamma)$. Ceci implique que si γ' est une autre composante connexe de $\pi_m^{-1}(\partial M_m)$, alors $\widehat{G}(\gamma) = \widehat{G}(\gamma')$ ou $\widehat{G}(\gamma) \cap \widehat{G}(\gamma') = \{\text{id}_{\widehat{N}_m}\}$. Il existe une composante connexe $\widehat{\alpha}$ de la frontière de \widehat{M}_m^m qui sépare l'intérieur de \widehat{M}_m^m de $\widehat{S}(\widehat{M}_m^m)$. On sait alors que $\widehat{\beta} = \widehat{S}(\widehat{\alpha})$ est la composante connexe de la frontière de $\widehat{S}(\widehat{M}_m^m)$ qui sépare l'intérieur de $\widehat{S}(\widehat{M}_m^m)$ de $\widehat{S}^2(\widehat{M}_m^m)$. L'automorphisme \widehat{T} , stabilisant \widehat{M}_m^m et $\widehat{S}(\widehat{M}_m^m)$, stabilise également $\widehat{\alpha}$. De même, puisqu'il stabilise $\widehat{S}(\widehat{M}_m^m)$ et $\widehat{S}^2(\widehat{M}_m^m)$, il stabilise également $\widehat{\beta}$. De $\widehat{T} \neq \text{id}_{\widehat{N}_m}$, on déduit $\widehat{G}(\alpha) = \widehat{G}(\beta)$.

Puisque $\widehat{G}(\beta)$ est l'image de $\widehat{G}(\alpha)$ par l'automorphisme intérieur $U \mapsto S \circ U \circ S^{-1}$, cet automorphisme laisse invariant $\widehat{G}(\alpha)$. Ainsi, si U est un générateur de $\widehat{G}(\alpha)$, alors $S \circ U \circ S^{-1}$ en est également un, et on a donc $S \circ U = U \circ S$ ou $S \circ U = U^{-1} \circ S$:

- dans le premier cas, on sait que S et U engendrent un groupe monogène infini, ce qui n'est possible que si S est dans $\hat{G}(\alpha)$;
- dans le second cas, on obtient $U^{-1} = S \circ U \circ S^{-1}$ puis :

$$U \circ S^2 = (U^{-1})^{-1} \circ S^2 = (S \circ U \circ S^{-1})^{-1} \circ S^2 = S \circ U^{-1} \circ S = S^2 \circ U$$

et on peut conclure au même résultat.

La contradiction provient de ce que S ne stabilise pas α . On vient de montrer $\hat{S}(\hat{M}_m^m) = \hat{M}_m^m$ et donc, comme annoncé, $\hat{F}_m(\hat{z})$ est contenu dans \hat{M}_m^m .

Poursuivons la démonstration : nous pouvons donc choisir un chemin $\hat{\eta}$ de \hat{z} à $\hat{F}_m(\hat{z})$ contenu dans \hat{M}_m^m qui se projette en un chemin η de z à $F(z)$ (voir la partie droite de la figure 2). Le chemin $\hat{F}_m(\hat{\Gamma})$ a pour origine $\hat{F}_m(\hat{z})$ et pour extrémité $\hat{F}_m \circ \hat{T}(\hat{z})$ qui n'est autre que $\hat{T} \circ \hat{F}_m(\hat{z})$ extrémité de $\hat{T}(\hat{\eta})$. On peut donc construire une homotopie libre \hat{J}_m entre $\hat{\Gamma}$ et $\hat{F}_m(\hat{\Gamma})$ telle que \hat{z} parcoure $\hat{\eta}$ le long de l'homotopie. Cette homotopie \hat{J}_m se projette en une homotopie libre J_m entre Γ et $F_m(\Gamma)$. Comme \hat{M}_m^m est simplement connexe d'après la remarque 3.2, on peut choisir J_m à support dans M_m . De plus, comme η est associé à \hat{F}_m , l'homotopie \hat{J}_m est associée à \hat{F}_m et à support dans M_m . \square

Démonstration du lemme 3.3. Considérons un lacet $\Gamma \subset N'_\infty$, non contractile dans N'_∞ , basé en un point $z \in N'_\infty$. On considère également un chemin δ de z à $F(z)$ contenu dans N'_∞ . Il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que Γ , $F(\Gamma)$, $F^2(\Gamma)$, δ et $F(\delta)$ soient contenus dans M_m . On en déduit que Γ n'est pas contractile dans N_m . D'après le lemme 3.4, pour tout $n \geq m$, il existe une homotopie libre J_n de Γ à $F(\Gamma)$ à support dans N_∞ et associée à \hat{F}_n . Considérons l'isotopie J_m ; nous allons prouver qu'elle est associée à \hat{F}_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons $\alpha_m = J_m(z)$. Le chemin α_m est associé à \hat{F}_m donc également associé à \hat{F}_n pour tout $n \leq m$ car la suite $(X_p, \hat{F}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante pour \preceq . Il en résulte que pour tout $n \leq m$, J_m est associée à \hat{F}_n .

Pour tout $n \geq m$, on choisit un relèvement $\hat{\Gamma}_n \subset \hat{M}_m^n$ de Γ à \hat{N}_n . Notons $\alpha_n = J_n(z)$. Ce chemin α_n est associé à \hat{F}_n donc à \hat{F}_m , toujours d'après la relation d'ordre \preceq . D'après la remarque 1.12, α_n est homotope à α_m à extrémités fixées dans N_m . Il reste à montrer qu'ils sont en réalité homotopes dans N'_∞ .

Pour cela, considérons le lacet $\alpha_n \cdot \alpha_m^-$. Notons \hat{z} un relèvement de z au revêtement universel \hat{N}'_∞ de N'_∞ . Relevons le chemin α_n en un chemin $\hat{\alpha}_n$ issu de \hat{z} puis α_m^- en un chemin $\hat{\alpha}_m^-$ issu de l'extrémité de $\hat{\alpha}_n$. Il existe un automorphisme \hat{T} du revêtement $\hat{\pi} : \hat{N}'_\infty \rightarrow N'_\infty$ tel que l'extrémité de $\hat{\alpha}_n \cdot \hat{\alpha}_m^-$ soit $\hat{T}(\hat{z})$. De même relevons Γ en un chemin $\hat{\Gamma} \subset \hat{N}'_\infty$ d'origine \hat{z} . Notons \hat{U} l'automorphisme du revêtement $\hat{\pi} : \hat{N}'_\infty \rightarrow N'_\infty$ envoyant l'origine de $\hat{\Gamma}$ sur son extrémité.

On retrouve les arguments employés à la fin de la démonstration de la proposition 2.10'. L'homotopie $J_n \cdot J_m^-$, entre Γ et lui-même, se relève en une homotopie entre le chemin $\hat{\Gamma}$ et le chemin $\hat{T}(\hat{\Gamma})$ d'extrémité $\hat{T} \circ \hat{U}(\hat{z})$. D'autre part, l'extrémité $\hat{U}(\hat{z})$ de $\hat{\Gamma}$ décrit $\hat{U}(\hat{\alpha}_n \cdot \hat{\alpha}_m^-)$ le long de l'isotopie et est donc envoyée sur $\hat{U} \circ \hat{T}(\hat{z})$. On en déduit $\hat{U} \circ \hat{T} = \hat{T} \circ \hat{U}$.

Si N'_∞ n'est ni le tore, ni l'anneau, il en découle que U et T appartiennent à un même sous-groupe monogène du groupe des automorphismes de revêtement. Ce résultat perdure si N'_∞ est l'anneau car le groupe des automorphismes de revêtement est alors monogène. Enfin, N'_∞ ne peut être le tore car cela signifierait que X_∞ est vide ce qui est impossible compte tenu des hypothèses de la proposition 3.1. Finalement, il existe toujours $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\hat{T}^k = \hat{U}^l$.

Cela signifie que $(\alpha_n \cdot \alpha_m^-)^k$ est librement homotope à Γ^l dans N'_∞ donc dans N_m . Or le premier lacet est homotopiquement trivial dans N_m tandis que le second ne l'est que si $l = 0$ auquel cas \hat{T} est l'identité. On obtient alors que α_n et α_m sont homotopes dans N'_∞ à extrémités fixées. Comme α_n est associé à \hat{F}_n , α_m est également associé à \hat{F}_m et finalement J_m est associée à \hat{F}_n . \square

4 Lacets contractiles

L'objet de cette partie est la démonstration de la proposition 2.13. Nous allons en fait démontrer la proposition 4.1 plus précise. Nous en donnerons une preuve topologique qui consiste à ramener

le lacet contractile sur un point. Le cas le plus simple est celui où le lacet est entièrement contenu dans un disque de N_X ; nous l'aborderons en premier avant de nous intéresser au cas général.

Proposition 4.1. *Soient $F \in \text{Homeo}_*(M)$ un homéomorphisme et $(X, I) \in \mathcal{I}$ une isotopie restreinte. Soit $y \in \text{Cont}(I) \setminus \text{Fix}(I)$. Alors il existe une isotopie restreinte $(X, I') \in \mathcal{I}$ fixant y et homotope à I relativement au complémentaire d'un compact de N_X .*

Lemme 4.2. *Soit D un disque topologique fermé de M .*

Alors il existe une famille $(\phi_{x,x',s}^D)_{(x,x',s) \in \mathring{D} \times \mathring{D} \times [0,1]}$ d'homéomorphismes de M vérifiant :

1. *l'application $(x, x', s) \mapsto \phi_{x,x',s}^D$ est continue de $\mathring{D} \times \mathring{D} \times [0, 1]$ dans $\text{Homeo}_*(M)$.*
2. *pour tout $(x, x', s) \in \mathring{D} \times \mathring{D} \times [0, 1]$, la restriction $(\phi_{x,x',s}^D)|_{M \setminus D}$ est l'identité de $M \setminus D$;*
3. *pour tout $(x, s) \in \mathring{D} \times \mathring{D} \times [0, 1]$, l'homéomorphisme $\phi_{x,x,s}^D$ est l'identité de M ;*
4. *pour tout $(x, x') \in \mathring{D} \times \mathring{D} \times [0, 1]$, l'homéomorphisme $\phi_{x,x',0}^D$ est l'identité de M ;*
5. *pour tout $(x, x') \in \mathring{D} \times \mathring{D}$, on a $\phi_{x,x',1}^D(x) = x'$.*

Démonstration. Considérons un homéomorphisme $h : D \rightarrow \mathbb{D}$ entre D et le disque unité fermé \mathbb{D} de \mathbb{R}^2 . Considérons ensuite l'homéomorphisme k du disque unité ouvert $\mathring{\mathbb{D}}$ sur \mathbb{R}^2 défini par $k(z) = \tan\left(\frac{\pi}{2}|z|\right)z$ pour tout $z \in \mathring{\mathbb{D}}$. Enfin, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, notons $t_u : x \mapsto x + u$ la translation affine de \mathbb{R}^2 de vecteur u . Pour tout $(x, x', s) \in \mathring{D} \times \mathring{D} \times [0, 1]$, on définit $\phi_{x,x',s}^D$ par :

$$(\phi_{x,x',s}^D)|_{\mathring{D}} = h^{-1} \circ k^{-1} \circ t_{s \cdot (k \circ h(x') - k \circ h(x))} \circ k \circ h \quad \text{et} \quad (\phi_{x,x',s}^D)|_{M \setminus \mathring{D}} = \text{id}_{M \setminus \mathring{D}}$$

L'application $(\phi_{x,x',s}^D)|_{\mathring{D}}$ est un homéomorphisme de \mathring{D} qui se prolonge par continuité, ainsi que sa réciproque, en l'identité sur le bord ∂D de D . On en déduit que l'on a bien défini un homéomorphisme $\phi_{x,x',s}^D$ de M . Grâce à la continuité de $(x, x', s) \mapsto (\phi_{x,x',s}^D)|_{\mathring{D}}$, on obtient l'assertion 1. Les trois assertions suivantes sont faciles à vérifier. Enfin, un calcul rapide conduit à $(\phi_{x,x',1}^D)|_{\mathring{D}}(x) = x'$ qui n'est autre que la dernière assertion. \square

Lemme 4.3. *Soit D_N un disque topologique fermé d'une surface N , x et x' deux points de D_N , γ et γ' deux chemins de l'intérieur de D_N d'origines x et d'extrémités x' . Il existe une isotopie $J = (G_t)_{t \in [0,1]}$ de l'identité de D_N à elle-même vérifiant :*

1. *J est à support dans D_N ;*
2. *pour tout $t \in [0, 1]$, on a $G_t \circ \gamma(t) = \gamma'(t)$;*
3. *J est homotope à extrémités fixées à l'isotopie identité relativement au complémentaire de D_N .*

Démonstration. On utilise le lemme précédent et pour tout $t \in [0, 1]$, on définit G_t par :

$$G_t = \phi_{\gamma(t), \gamma'(t), 1}^{D_N}$$

L'application H définie par :

$$H(s, t) = \phi_{\gamma(t), \gamma'(t), s}^{D_N}$$

réalise bien une homotopie entre l'isotopie identité $(H(0, t))_t$ et l'isotopie $(G_t)_t = (H(1, t))_t$, relativement au complémentaire de D_N . \square

Remarque 4.4. Dans le cas particulier où le lacet $\gamma = I(y)$ est contenu dans un disque fermé $D_N \subset N_X$, la proposition 4.1 est un corollaire immédiat du lemme 4.3. En effet, celui-ci assure l'existence d'une isotopie $J = (G_t)_{t \in [0,1]}$ de l'identité de N_X à elle-même à support dans D_N et vérifiant, pour tout $t \in [0, 1]$, $G_t \circ \gamma(t) = y$. L'isotopie restreinte (X, I') définie par $I' = J \circ I$ convient.

Le principe de la démonstration qui suit est de se ramener à ce cas particulier.

Démonstration de la proposition 4.1. Notons l'isotopie restreinte $(X, I) \in \mathcal{I}$ sous la forme $I = (F_t)_{t \in [0,1]}$. Considérons le carré $K = [0, 1]^2$ et un paramétrage $\theta_0 : [0, 1] \rightarrow \partial K$ du bord de K vérifiant $\theta_0(0) = \theta_0(1) = (0, 0)$. Soit $\varphi : \partial K \rightarrow N_Y$ définie par $\varphi \circ \theta_0(t) = F_t(y)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Comme $I(y)$ est un lacet, φ est correctement définie et continue sur ∂K . De plus le lacet $I(y)$ est contractile, donc φ se prolonge en une application $\varphi : K \rightarrow N_X$ continue (nous conservons la notation φ après prolongement).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on peut découper le carré K en n^2 « petits carrés » de côté $\frac{1}{n}$ de la forme $[\frac{a}{n}, \frac{a+1}{n}] \times [\frac{b}{n}, \frac{b+1}{n}]$ avec $a \in \{0, \dots, n-1\}$ et $b \in \{0, \dots, n-1\}$. Comme φ est continue sur le compact K , il existe un entier $n \geq 2$ tel que l'image par φ de chacun des n^2 « petits carrés » soit contenue dans l'intérieur d'un disque topologique fermé de M . On choisit désormais une telle valeur de n .

Nous allons maintenant construire une famille décroissante $(K_i)_{0 \leq i \leq n^2}$ de sous-ensembles de K telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n^2-1\}$, K_i soit la réunion, qui est simplement connexe, de n^2-i « petits carrés » fermés, définie de la façon suivante :

- on pose $K_0 = K$;
- soit $i \in \{1, \dots, n^2-1\}$; supposons K_{i-1} construit comme réunion de n^2-i+1 « petits carrés ». Parmi ces « petits carrés », on considère, parmi ceux contenant les points d'ordonnées maximales, celui qui contient les points d'abscisses maximales et on le note C_i . On note K_i la réunion des n^2-i « petits carrés » restants.
- en répétant ce procédé, on « enlève les petits carrés » un à un en commençant par les plus hauts et pour chaque ligne les plus à droite. On obtient nécessairement $K_{n^2-1} = [0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{1}{n}]$, seul « petit carré » contenant $\{(0, 0)\}$, que l'on note C_{n^2} .
- on pose enfin $K_{n^2} = \{(0, 0)\}$.

On construit de même une suite de paramétrages $(\theta_i)_{i \in [0,1]}$ avec $\theta_i : [0, 1] \rightarrow \partial K_i$ du bord de K_i de la façon suivante :

- θ_0 a déjà été construit ;
- soit $i \in \{1, \dots, n^2-1\}$; supposons θ_{i-1} construit. Il existe un segment $[a_i, b_i] \subset]0, 1[$ tel que la restriction $(\theta_{i-1})|_{[a_i, b_i]}$ soit à valeurs dans ∂C_i et $(\theta_{i-1})|_{[0, a_i] \cup [b_i, 1]}$ soit à valeurs dans $\partial K_{i-1} \setminus \partial C_i$. On choisit $\theta_i : [0, 1] \rightarrow \partial K_i$ de sorte que l'on ait $(\theta_{i-1})|_{[0, a_i] \cup [b_i, 1]} = (\theta_i)|_{[0, a_i] \cup [b_i, 1]}$;
- on pose enfin $\theta_{n^2}(t) = (0, 0)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Soit $i \in \{1, \dots, n^2\}$. L'ensemble $\varphi(C_i)$ est contenu dans l'intérieur d'un disque topologique fermé $D_i \subset \hat{\pi}(\hat{U})$. Considérons les chemins $t \rightarrow \theta_{i-1}(t)$ et $t \rightarrow \theta_i(t)$ avec $t \in [a_i, b_i]$. Ces deux chemins ont même extrémité et même origine ; ils paramètrent chacun une partie de ∂C_i . Utilisons le lemme 4.2 et définissons l'isotopie $J^i = (G_t^i)_{t \in [0,1]}$ de l'identité de N_X à elle-même par :

$$\forall t \in [0, 1] \quad G_t^i = \phi_{\varphi \circ \theta_{i-1}(t), \varphi \circ \theta_i(t), 1}^{D_i}$$

On obtient alors $G_t^i \circ \varphi \circ \theta_{i-1}(t) = \varphi \circ \theta_i(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Par récurrence immédiate, on trouve :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad G_t^{n^2} \circ G_t^{n^2-1} \circ \dots \circ G_t^2 \circ G_t^1 \circ \varphi \circ \theta_0(t) &= \varphi \circ \theta_{n^2}(t) \\ \text{ou encore} \quad \forall t \in [0, 1], \quad G_t^{n^2} \circ G_t^{n^2-1} \circ \dots \circ G_t^2 \circ G_t^1 \circ F_t(y) &= y. \end{aligned}$$

Définissons l'isotopie restreinte (X, I') en posant $I' = J^{n^2} \circ \dots \circ J^1 \circ I$. L'équation précédente assure que I' fixe y et se met bien sous la forme $I' = J \circ I$ avec J à support dans $\hat{\pi}_X(\hat{U})$. \square

Références

- [BK84] M. BROWN et J. M. KISTER. Invariance of complementary domains of a fixed point set. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **91** (1984), n° 3, 503–504.
- [Eps66] D. B. A. EPSTEIN. Curves on 2-manifolds and isotopies. *Acta Math.*, **115** (1966), 83–107.

- [LC05] P. LE CALVEZ. Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, **102** (2005), n° 1, 1–98.
- [LC06] P. LE CALVEZ. Periodic orbits of Hamiltonian homeomorphisms of surfaces. *Duke Math. J.*, **133** (2006), n° 1, 125–184.
- [Whi57] H. WHITNEY. *Geometric integration theory*. Princeton University Press, Princeton, N. J. (1957).